This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

687

16-1

QA
35
.C94
1740

1817
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

Crivelli, Giovanni

# ELEMENTA ARITHMETICÆ NUMERICÆ ET LITTERALIS

EXPOSITA

A JOANNE CRIBELLO
C. R. S.
Academiæ Bononienſis Academico Honorario,
& Regiæ Societatis Londinenſis Socio.

AD EXCELLENTISS. COMITISSAM

D. CLELIAM
GRILLAM BORROMÆAM

SECUNDA EDITIO LATINA
*correcta, & aucta.*

VENETIIS,
Apud Jo: MARIAM LAZZARONI
M. DCC. XL.
*SUPERIORUM PERMISSU, AC PRIVILEGIO.*

Hist. of Sci.
Zanichelli
11-6-30
22642

# Ill:ma & Exc:ma Domina.

JAmpridem & mihi factum eſt celebre nomen tuum, & ad aures pervenere illæ præclariſſimæ laudes, quæ te inſignem reddidere non ſolum

1-9-40 HCM.

*in Italiâ, ſed extra apud omnes, cultas Nationes. Ut verum dicam, ea quæ de te referri, & prædicari audiveram, quoniam mihi videbantur admirabilia, ambiguum quaſi & dubium effecerant, an veritati eſſent conſentanea. Etenim vix credibile putabam dari Genium tam eximium, & Te ex clariſſimo ſanguine natam, inter delicias, & commoda adeo neglexiſſe, quæ cæteris adeo ſunt curæ, neque ſe ſatis æſtimare nobilem niſi cura & laboribus nobiliorem reddidiſſet. Id tamen coactus ſum ut crederem, & in Te agnoſcerem tot Virtutes conjunctas, quæ vix inveniri ſolent. Difficilis enim eſt illa præclara animi magnitudo qua nites, & ſimul ſingularis moderatio, & affabilitas, humanitas, pietas, ſed difficilior ille eximius Veritatis amor, & omnium rerum notitia, & eruditio,*

*qua*

*qua ceteras Virtutes tuas ornaviſti. Sæpe enim audio multa de Te prædicari, ſed quod majorem admirationem facit, nunc ut Linguarum peritiſſimam, nunc in antiquis, & novis hiſtoriis verſatiſſimam, nunc intelligentia veterum Poetarum celebrem, nunc doctrina Patrum, at quod rarius eſt, purioris Philoſophiæ arcana callentem, & præſertim in adyta penitiora Mathematum ingreſſam, quibus inter cæteras emines. Nimirum Tibi arcana naturæ pro magna parte reſerantur, & numeri & tendentiæ & proportiones, juxta quas ab Opifice Deo conſtructum eſt Univerſum. Tibi motus fluidorum, & ſolidorum, Corporum Cæleſtium orbitæ, & periodi, & numerorum, figurarumque arcana innoteſcunt, ut neſcio cui Ordini ingenium tuum recenſendum ſit; profecto inter paucos illos, quos* æquus amavit Ju-

piter

piter. *Ex quibus quam erga te reverentiam & obſequium conceperim, dicere non poſſum, quod quidem jamdiu nutritum ſemper ſervavi, licet e longinquo, & ſine ullo commercio. Quod quidem nihil mihi optabilius, quam ut tibi aliquo modo ſignificarem, ut nunc facio, offerendo tibi quicumque ſit, hunc exiguum ingenii mei Laborem. Te decerent fateor, ſublimiora; arbitror tamen fore ut tibi non diſpliceant Elementa Scientiæ, quam* Divinam *appellant. Hæc a me conſtructa fuere ad promovenda in Italia hujuſmodi ſtudia, neque utilius viſum eſt quam te in exemplar proponere. Illa ergo ut benigne excipias, oro, & illo animo, quo etiam minutiora ſoles excipere. Vale*

Humil. & Obſequioſiſs.
*Joannes Cribellus.*

EDI-

# EDITOR LECTORI.

QUam grata fuerint hæc Elementa, deduci poteſt ex præclaro Eruditorum teſtimonio in Actis Lypſiæ Anno 1729. Menſe Martio. *Per quam utile, & elegans eſt hoc Arithmeticæ univerſæ compendium, cui vix aliud non modo Italice ſed & cæteris linguis conſcriptum præferendum videtur*. Quare cum a multis exquireretur, neque exemplaria ſufficerent, diu rogavimus Auctorem ut ſecundo ederet atque ea quæ ad complendum tractatum requiri videbantur adderet, cui tandem animum advertens addidit quæ addenda cenſuit; maluit autem editionem eſſe Latinam.

PRÆ-

# PRÆFATIO.

DUas partes continet Arithmetica, aliam quæ circa ſimpliciores computationes verſatur ad uſum civilem ſpectantes, aliam quæ ſublimiores computationes tractat ſpectantes ad Scientias. Prima pars dicta fuit *Minor*, ſecunda *Major*. Prima comuniter Arithmetica fuit appellata; ſecunda Analyſis, quaſi *Scientia Reſolutoria*, quoniam ab ipſa reſolvuntur graviora Problemata. Arabes ipſam vocarunt *Al' gia'br*, quaſi *Artem* reducendi, unde originem traxit nomen Algebræ, & Almukabalæ; quaſi *Artis Comparatricis*; nam *comparando* inter ſe qnantitates, & ipſas adæquando ad Veritatem ducit, & quod erat confuſum, & obſcurum, invenit, & demonſtrat. (*a*) Theo inventionem hujuſce Artis Platoni attribuit. Defendunt tamen Pythagorici hanc a Pythagora didiciſſe Platonem; ſed hanc antiquiſſimam fuiſſe, & populis orientalibus familiarem affirmat Stevinus (*b*) in Sæculo erudito. Illud certum eſt ipſam a veteribus habitam fuiſſe tan-

(a) *L. 13. Euclidis, ſi tamen Theon eſt, & non alius Auctor.*

(b) *In Geographicis.*

tanquam arcanam, & myſteriorum plenam, quam nefas eſſet vulgo comunicare, ex quo factum eſt potiſſimum, (niſi & ipſius Scientiæ difficultatem accuſare velis) ut vix veſtigia cernantur in Veterum Libris. Fortaſſe etiam, (ut queritur (*a*) Nonnius,) ut admirationem magis excitarent, maluerunt potius exponere veritates inventas, quam methodum illas inveniendi.

Liber antiquior, qui apud Nos extat, eſt Diophanti Alexandrini, qui traslatus ex Lingua Græca in Latinam prodiit in lucem Anno 1575. & ampliori commento inde illuſtratus fuit a Bacheto Sebuſiano, & mox a Fermatio. Sed jampridem Analyſin in Europam invexerant Arabes cum Hiſpaniis potiti ſunt, & cum computationes fierent vel per litteras Græcas, vel per numeros Romanos, introductæ ſunt cyphræ, ut appellant, *Barbaræ* quibus communiter utimur, ſecundum proportionem Decadicam, quibus Ars facilior, & perfectior evaſit. Cum primum hoc incœperit, haud facile eſt definire. (*b*) Gherardus Voſſius putat factum eſſe Anno 1250. (*c*) Valliſius tamen pluribus argumentis coniicit, id eſſe antiquius.

 Illud

(a) *In Algebra*.
(b) *In Scientiis Mathematicis C.* 8.
(c) *In Algebra C.* 4.

Illud autem conſtat Arabes accepiſſe hujuſmodi cyphras ab Indis, ut legere eſt in Commentariis Al' ſephadi Arabis ad Poema Tograi, ubi tres inventiones tribuuntur Indis: quorum prima eſt Liber, cui titulus Golaila Wadamna, quo Apologhi quidam continentur; altera Schacchiorum Ludus; tertia Cyphrarum. Quare illud eſt veriſimile Arabes hanc methodum computandi ab Indis accepiſſe. Illud certum eſt, quod cum prodiit Analyſis Græca, omnino diverſa apparuit ab Analyſi Arabica.

Plurimi jam circa partem Minorem verſati erant; ſed pauci circa Majorem. Primus, qui Theoriam hujuſce partis edidit in lucem, cenſetur eſſe Lucas a S. Sepulcro, Minorita Anno 1494. Venetiis, in quo tamen tractatu ipſe pleroſque in hac arte inſignes memorat, ut Paulum a Pergola, Dominicum Bragadenum, & Antonium Cornelium Patritios Venetos & multa ipſe affirmat accepiſſe ex ſcriptis Leonardi Piſani; Jordani, Blaſii a Parma, Joannis Sacroboſco, & Proſdocimi a Patavio. Multa ipſa pertractat de quantitatibus affirmativis, & negativis, de ſurdis, de falſis poſitionibus, & æquationibus; ſed ultra quadraticas non procedit. Edita mox in lucem Algebra Cardani ſub titulo Artis

Ma

Magnæ, ubi novæ regulæ exponuntur, & præſertim circa æquationes Cubicas, quarum tamen inventionem ipſe tribuit Scipioni Ferreo, & Nicolao Tartaleæ Brixienſi. Poſtquæ Raphael Bombellius Bononienſis regulam pro *Biquadraticis* expoſuit, neque ad gradus majores perventum eſt, quæ maxima eſt primorum Inventorum gloria, ut notat (*a*) Fontanellius. Novam mox rerum faciem dedit Franciſcus Vieta Nobilis Gallus Anno 1590. ad litteras transferendo, quæ hactenus per numeros tractata fuerunt, & novam Arithmeticam producendo, quæ quia per ſymbola & ſpecies operatur, dicta eſt *Symbolica*, & *Specioſa*; cujus quidem dignitas eo major eſt Numericà, quo Infinitum Finito præſtat. Et licet quidam hujuſce Lucis radii ex Buteonis ſcriptis eluceſcant, comuni tamen conſenſu hujuſce Inventionis gloria datur Vietæ. Translata apud Anglos Specioſa, Harriotus, & Oughtredus vires intendere ut ipſam perficerent Primus edidit Operam Oughtredus ſub titulo *Clavis Mathematicæ* Anno 1631. & poſt paucos dies viſa eſt etiam *Praxis Analytica* Harrioti edita poſt mortem Auctoris a Valterio Valnerio. Quemadmodum Oughtredus paulo diſceſſit à Vieta, ita Harrio-



(a) *Hiſtoria Academiæ Scientiarum Anno* 1705.

tus plurima addidit utilima, & quoad uſum Symbolorum, & quoad naturam Æquationum. Anno 1637. magno plauſu recepta eſt Algebra Carteſii, cujus uſus in Geometricis maximam admirationem excitavit ut omnes illius ſæculi Mathematici curam impenderent ad illam promovendam, & excolendam, inter quos Franciſcus Schootenius, Eraſmus Bartolinus, Hudenius, Vithus, Bonius, Sluſius & alii plurimi, qui hujuſmodi Analyſin excoluere, Carteſianam dictam. Poſt quæ incredibile ad quos gradus fuerit promota, contendentibus quadam æmulatione omnium nationum Philoſophis. Tumque primum applicata fuit a Valliſio ad Methodum *Indiviſibilium* a Cavallerio expoſitum anno 1655. inde a Nevvtono ad Series infinitas, & ad ſublimiores Curvas, & applicata quantitatibus infiniteſimis, cujus methodus a Leibnitio expoſita anno 1684. excitavit ingenia hominum doctiſſimorum, ut utriuſque Bernoullii, & Marchionis ab Hoſpitalio, aliorumque plurimorum, opera quorum provecta eſt ad gradum, ultra quem videtur evehi non poſſe.

Hujus Scientiæ elementa tradere in animo eſt, ut iis intellectis ad ſublimiora poſſit aſcendi. Magna pars cupidi Scientiarum

agno-

agnoſcendarum, ſed diſcere moleſtum, quod fit etiam propter defectum ſcriptorum. Arithmetica, & Geometria ſunt primæ Scientiæ, quibus tanquam alis, ut notat Plato, fertur Intellectus ad veritatem; ſed illas agnoſcere non eſt obvium. Auctores celebriores ad ſubliminiora intendentes, Elementaria neglexere; plerique de Arithmetica minori tractarunt; pauci de majori; alii Theorias, non tamen Praxes; alii Praxes ſine Theoriis expoſuere, alii numeros ſine ſymbolis, alii ſymbola ſine numeris. Nos operæ pretium facturos cenſuimus, ſi Scientiam hujuſmodi a primis principiis pertractaremus, non ſolum Theorias, ſed etiam Praxes exponendo, & numeris ſimbolo jungeremus; gradatim aſcendendo a ſimplici ad compoſitum, & a parte *minori* ad *majorem*. Lectorem hic ſupponimus omnino rudem numeris, & quantitatibus, & a zero incipientem. Opus autem erit in duas partes diviſum. In prima exponitur natura numeri, & Algorithmus quantitatum tam numericè, quam ſymbolicè, hinc de rationibus & proportionibus agitur; de Poteſtatibus, & earum Radicibus. Hinc applicantur doctrinæ ad reſolutionum problematum ſimplicium, & præſertim ad Series infinitas; & doctrinam Combina-

bina-

binationum, & Variationum omnium poſſibilium. Secunda pars de æquationibus altis tractat, ubi methodus reſolvendi omnes æquationes quadraticas, & cubicas & biquadraticas, & cujuſcunque generis aperitur, & per Methodum Limitum inveniuntur quæcunque Radices. Quibus probe intellectis omnia quæ majoris momenti ſunt in Arithmetica facile enucleari poſſunt, & ad Geometriam aditus fieri, quæ Figurarum proprietates, & analogias ſubſidio Arithmeticæ ut plurimum inveſtigat.

---

N. 309.

# NOI RIFORMATORI

Dello Studio di Padova.

AVendo veduto per la Fede di Reviſione, ed Approvazione del P. *Fra Paolo Tomaſo Manuelli Inquiſitore di Venezia*, nel Libro intitolato: *Elementa Arithmeticæ Numericæ, & Litteralis compoſita a Joanne Cribello C. R. S.* non v'eſſer cos'alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimente per Atteſtato del Segretario Noſtro; niente contro Principi, e buoni coſtumi, concediamo Licenza a *Gio: Maria Lazzaroni Stampatore di Venezia*, che poſſi eſſer Stampato, oſſervando gl' ordini in materia di Stampe, e preſentando le ſolite Copie alle Pubbliche Librerie di Venezia, e di Padova.

Dat. li 14. Luglio 1740.

( Z. Piero Paſqualigo Rif.
(
( Lorenzo Tiepolo Kav. Proc. Rif.

Regiſtrato in Libro a C. 57.

*Agoſtino Bianchi Segr.*

1740. 21. Luglio.

Regiſtrato nel Mag. Eccell. contro la Beſtemmia.

*Vettor Gradenigo Segr.*

# ELEMENTORUM
# ARITHMETICÆ
## *PARS PRIMA.*
### SECTIO I.

*Definitiones.*

1. QUantum dicitur *quicquid* ex partibus componitur, veluti *linea*, *ſpatium*, *exercitus*. Et abſtractè *Quantitas*.

2. Si partes componentes exiſtunt ſimul, & conjunctæ, Quantitas dicitur *Continua*, ut *linea*, vel *ſpatium*. Si partes exiſtunt ſimul, ſed disjunctæ, tum dicitur *Diſcreta*, ut *exercitus*, & quodlibet rerum *aggregatum*, ſeu *numerus*. Si una poſt aliam ſuccedit, Quantitas dicitur *Diſcreta*, ut *tempus*, *motus*.

3. Quicquid adſumitur ut indiviſum dicitur *Unitas*, quæ adſumitur tanquam primum numerandi principium, ad quod quaſcunque quantitates reducimus ut comunem omnium menſuram. Ita lineas menſuramur per unitatem linearem, ſuperficies per unitatem ſuperficialem, ſolida per unitates ſolidas. Unitas autem arbitraria eſto.

4. Aggregatum autem multarum unitatum propriè dicitur *Numerus*.

5. *Quantitas* quæ in alia continetur, dicitur *Pars*, quæ continet dicitur *Totum*.

6. Pars

6. Pars quæ continetur exacte in toto, ſive quæ repetita totum adæquat, dicitur *Aliquota*, ut 2 relative ad 4. Si bis continetur dicitur Pars *ſecunda*, ſi ter, quater &c. *tertia*, *quarta* &c.

7. Quantitas relative ad ſuas partes aliquotas conſiderata dicitur *Multiplex*. Quæ duas aliquotas continet dicitur *duplex*, quæ tres, *Triplex* &c.

8. Pars quæ exacte non continetur in toto, eſt *Aliquanta*, ut 2 reſpectu ad 5.

9. Pars quæcunque Unitatis dicitur *Fractio*.

10. Quantitates quarum eadem unitas eſt menſura, dicuntur *Homogeneæ*, ut tres palmi, quatuor palmi, quorum comunis menſura eſt unitas palmaris.

11. Si quantitates vero referantur ad diverſas unitates, ſunt *Heterogeneæ*, ut tres palmi, & tres pollices, quorum primi menſurantur per unitatem palmarem, ſecundi per unitatem pollicis.

12. Numerus *primus* eſt ille, cujus nullus numerus eſt pars aliquota, & ſola unitas, ut 5. 7.

13. Numerus *Compoſitus*, cujus præter unitatem eſt quoque alter numerus pars aliquota, ut 6 cujus partes aliquotæ ſunt 2, & 3.

14. Pars quæ exacte continetur & pluribus quantitatibus eſt *aliquota comunis*.

15. Numeri *inter ſe primi* dicuntur quorum nulla eſt pars comunis aliquota præter unitatem, ut 5. 7.

16. Numeri vero *inter ſe Compoſiti*, quorum preter unitatem aliquis numerus eſt pars comunis aliquota, ut 6. 4. quorum aliquota comunis eſt 2.

17. Numerus eſt *Par*, qui dividi poteſt in duos æquales numeros, ut 6. Secus eſt *Impar* ut 7.

18. Quantitates, quarum relatio ad unitatem poteſt exprimi numeris, dicuntur *Numericæ Rationales*, *Commenſurabiles*. At quæ, licet per lineam, non poſ-

ſunt

ſunt exprimi numero dicuntur *Surdæ*, *Irrationales*, *Incommenſurabiles*, ut ſuo loco explicabitur.

19. Scientia quæ de quantitatibus numericis tractat dicitur *Arithmetica*, a voce Græca Arithmos, quæ numerum ſignificat. Quæ ſi numeros ſub ſpeciebus tractat, vel litteris, dicitur *Speciosa*, *Univerſalis*, aut *Litteralis*.

20. *Algorithmus* eſt methodus quantitates Arithmeticas determinandi, cujus quatuor ſunt primariæ partes, *Addere*, *Subtrahere*, *Multiplicare*, & *Dividere*.

21. Per Additionem determinatur totum, quod ex datis partibus componitur. Per ſubtractionem differentia inter duas quantitates. Multiplicando determinatur productum, quod fit ex quantitate aliquoties ſumpta. Demum dividendo determinatur quoties una quantitas in alia contineatur. Numerus qui dividi debet dicitur *Dividendus*, ille per quem dividitur dicitur *Diviſor*, & qui indicat quoties unus in alio contineatur, eſt *Quotus*.

22. *Axioma* eſt propoſitio per ſe nota.

23. *Theorema* eſt propoſitio doctrinalis.

24. *Problema* eſt propoſitio quæ debet reſolvi.

25. *Lemma* eſt Theorema ordinatum tanquam medium ad aliud.

26. *Corollarium* eſt conſequentia immediata alicujus Theorematis, vel Problematis.

27. *Demonſtratio* eſt explicatio rationum ex quibus certe, & evidenter aliqua propoſitio deducitur.

# DE PRIMO ALGORITHMO NUMERICO.

## CAPUT I.

VEriſimile eſt primas hominum enumerationes ex digitis incæpiſſe. Illud quidem obſervatur, quod quælibet Natio enumerationem non ultra denarium producat, qui eſt digitorum numerus; ad quem cum pervenerint rurſus ab unitate incipiunt. Quod etiam Arabes imitati, ex quibus, ut notavimus, methodus, quæ nunc in uſu comuni eſt, computandi originem habuit. Prima arbitraria quantitas dicitur *Unus*, ſi ipſi addatur alia æqualis fit *Duo*, ſi alia inſuper addatur fit *Tres*, ſic *Quatuor*, *Quinque*, *Sex*, *Septem*, *Octo*, *Novem*, *Decem*. Poſt quæ rurſus ab unitate incipimus, quæ addita denario dat *Undecim* & duæ unitates additæ denario dant *Duodecim* &c. uſque ad bis decem, quem vocamus *Viginti*. Sic ter decem vocamus *Triginta* uſque ad decem decem, qui vocatur *Centum*. *Decem* centum vocamus *Mille*, & decem mille vocamus *Decem mille*, hinc *Centum mille*, hinc *Millionem*. Millionem vero Millionis *Billionem* dicimus, & Millionem Billionis *Trillionem*. Sic fit *Quatrillio*, *Quinquillio* &c.

Ut autem numerus quicunque exprimeretur, cyphras quaſdam ſive characteres invenere quibus numerus quilibet exprimeretur, quod quidem per ſolas decem cyphras eſt factum; ut videre eſt in tabula ſequenti.

Zero

| | | | |
|---|---|---|---|
| Zero | 0. | Quinque | 5. |
| Unitas | 1. | Sex | 6. |
| Duo | 2. | Septem | 7. |
| Tres | 3. | Octo | 8. |
| Quatuor | 4. | Novem | 9. |

Ut autem per ſolas hujuſmodi cyphras quilibet numerus poſſet repræſentari, inſtituta eſt quædam ſeries, & ſtatutum, ut cyphræ quæ in prima claſſe eſſent procedendo a dextera ad ſiniſtram, (ut eſt mos ſcribendi Orientalibus) ſignificarent ſimplices *Unitates*, quæ eſſent in ſecunda claſſe *Decades*, quæ in tertia *Centenaria*, & ſic in ratione decupla Valores excreſcerent, ut in figura.

| Centummille | Decemmille | Mille | Centum | Decas billionis | Billio | Centummille | Decemmille | Mille | Centum | Decas millionis | Millio | Centummille | Decemmille | Mille | Centum | Decas | Unitas |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Ex qua inſtitutione ſequitur methodus generalis enumerandi.

Sit enim enumeranda quantitas.

2 3 4‴ 5 6 7 8 9 3″ 2 3 4 5 6 7′ 8 9 1 3 4 5

Diſtinguatur numerus in claſſes; & quælibet claſſis contineat cyphras ſex incipiendo a dextera ad ſiniſtram. Tum ad primam cyphram ſecundæ claſſis ponatur una linea; ad primam ſecundæ duæ lineæ, ad primam tertiæ tres, & erunt in prima claſſe Unitates, in ſecunda Milliones, in tertia Billiones, in quarta Trilliones &c.

 Sic

Sic numerus datus erit ducenta trigintaquatuor trilliones, quingenta ſexaginta ſeptem mille octingenta, nonaginta tres billiones &c. Id pendet ex hominum inſtituto. Neque enim difficile eſt cognoſcere alio modo enumerationem potuiſſe inſtitui. Et quidem Eirardus Veigelius novum Arithmeticæ genus explicat, quæ progreditur in ratione quadrupla, & ideo *Tetradica* dicitur. Et (*a*) Leibnizius aliam exponit *Binariam*.

## AXIOMA FUNDAMENTALE.

Totum æquatur ſuis partibus ſimul ſumptis.

## PROBLEMA I.

*Addere numeros.*

INtelligantur ſemper homogenei.

1. Ponantur numeri addendi tali ordine, ut in prima claſſe ſint omnium unitates, in ſecunda decades, in tertia centenaria, & ſic procedendo.

2. Addantur hinc unitates, hinc decades, hinc centenaria &c. & ſumma unitatum ſub unitatibus ſcribatur, ſumma decadum in decadibus, & ſic procedendo.

3. Quilibet vero denarius unitatum tranſmutetur in decadem, & quilibet denarius decadum in centenarios, & ſic procedendo & habebitur quæſita ſumma. Sint exempli gratia addendi A, & B.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Numeri | A | 4 | 3 | 5 | 6 |
| Addendi | B | 3 | 3 | 1 | 2 |
| | C | 7 | 6 | 6 | 8 |

Po-

(a) *Hiſtoria Acad. Reg. Anno* 1703.

Poſito B ſub A, ut eſt in figura addantur prius unitates, & ſunt 8, quæ ſcribentur in claſſe unitatum hinc 6 decades, hinc 6 centenaria, hinc 7 milliaria, & erit C quæſita ſumma, ut clarum eſt ex Axiomate.

Sint ſecundo loco addendi M, & N

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Numeri | M | 4 | 6 | 8 | 9 |
| Addendi | N | 3 | 8 | 5 | 4 |
| Summa | P | 8 | 5 | 4 | 3 |

Unitates ſunt 13. Quare ſcripto 3. decem reducantur in unam decadem, & fient 14 decades. Scriptis ergo 4 decadibus, decem reducantur in centenarium, & fient 15 centenaria; & ſcripto 5 reducantur alii decem in millenarium, & erunt 8 millenaria.

Quare ſumma quæſita erit P, nempe 8 millenaria, 5 centenaria, 4 decades, 3 unitates.

## PROBLEMA II.

### *Subtrahere Numeros.*

1. NUmerus ſubtrahendus ponatur ſub numero, ex quo eſt ſubtrahendus eo ordine ut unitates reſpondeant unitatibus, decades decadibus &c.

2. Detrahantur inde unitates ab unitatibus, & notetur reſiduum; inde decades a decadibus, & ſic proſequendo eritque aggregatum omnium reſiduorum reſiduum quod quæritur.

Ex numero A ſit ſubtrahendus numerus B.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | 7 | 3 | 7 |
| B | 3 | 1 | 4 |
| C | 4 | 2 | 3 |

Differentia unitatum eſt 3; & notetur 3. Differentia decadum eſt 2. Quare notetur 2. Differentia centenariorum eſt 4, & ſcribatur 4.

Differentia ergo, ſive reſiduum quæſitum eſt C, nempe 4 centinaria, 2 decades & 3 unitates.

3. Si cyphra inferior ſit ſuperiori major tum illa augeatur decade, hinc fiat ſubtractio. Tum vero decas claſſis ſequentis concipienda erit unitate minor.

| | | | |
|---|---|---|---|
| N | 4 | 3 | 2 |
| M | 1 | 4 | 6 |
| Q | 2 | 8 | 6 |

Sic ſit e numero N ſubtrahendus numerus M. Et quoniam 6 unitates non ſubtrahi poſſunt a 2 unitatibus, ſubtrahantur a 12, & reſiduum ſit 6. Erunt ergo ſubtrahendæ 4 decades a 2 decadibus, ſeu 5 a 3. Quare addo 1 ad 4, & fiunt 5. Sed 5 a 3 ſubtrahi non poteſt. Subtrahatur ergo a 13 & fiunt 8. Hinc addo 1 centenario, & fiunt 2. Quare 2 centenariis a 4 ſubtractis ſit reſiduum 2. Reſiduum ergo quæſitum eſt Q.

## *SCHOLION.*

Ut probetur ſumma adhibetur ſubtractio, & ut probetur ſubtractio adhibetur ſumma. Nam ſi M plus N æquetur P: Ergo P minus N æquatur M. E contra ſi P minus N æquatur M; P æquatur M plus N.

PRO-

## PROBLEMA III.

*Multiplicare Numeros.*

DIſtinguantur caſus, &

1. Sit multiplicanda una cyphra per unam cyphram; tumque facile eſt cognoſcere productum. Ita ſi 2 multiplicetur per 3 productum erit 6.

2. Sint duæ multiplicandæ per unam, tumque multiplicentur primo unitates, hinc decades; & aggregatum productorum erit quæſitum productum.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ut ſi A debeat | A | 3 | 2 |
| multiplicari per B, | B | | 2 |
| erit productum C | C | 6 | 4 |

3. Si ſint tres cyphræ, aut quatuor, quinque in infinitum, multiplicentur ſingulæ una poſt aliam incipiendo ab unitatibus, & quælibet producta in ſua claſſe ſcribantur.

4. Quod ſi aliquod productum ſuperat 9, transferantur decades in claſſem ſequentem.

5. *Sint duæ cyphræ multiplicandæ* per duas ut in figura.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Numerus multiplicandus | A | | 4 | 2 |
| Numerus multiplicans | B | | 2 | 3 |
| Productum primum | C | 1 | 2 | 6 |
| Productum ſecundum | D | 8 | 4 | |
| Productum totale quæſitum | E | 9 | 6 | 6 |

Multiplicetur primo numerus A per primam cyphram 3, & quoniam 3 ſunt unitates, ponatur productum C in claſſe unitatum. Tum multiplicetur per ſecundam cyphram 2, & quoniam 2 ſunt decades, ſcribatur productum D in claſſe decadum. Tum addantur producta, & erit E productum totali quæſitum.

6. Si

6. Si tres ſint multiplicandæ per tres multiplicetur totus numerus datus per cyphras ſingulas numeri multiplicantis & productum primum in prima claſſe ponatur, ſecundum in ſecunda, tertium in tertia &c. & ſumma productorum erit quæſitum productum.

Eadem methodus erit ſi quatuor cyphræ multiplicandæ ſint per quatuor, quinque per quinque &c.

## PROBLEMA IV.

*Numeros dividere.*

1. SI una cyphra eſt dividenda per unam cyphram, tum facilis eſt diviſio. Ita ſi 8 eſt dividendus per 2, idem eſt ac quærere quoties 2 continetur in 8, & fit *Quotus* 4.

2. Si duæ cyphræ ſint dividendæ per unam, divido unam poſt aliam ſed incipiendo a ſiniſtra. Ita ſi A debeat dividi per B.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Numerus dividendus | | A | 6 | 4 |
| Diviſor | | B | | 2 |
| Quotus primus | 3 | | | |
| Quotus ſecundus | 2 | | | |
| Quotus totalis | 3 | 2 | | |

Divido primum 6 per 2, & quotus erit 3. Et quoniam dividuntur decades, quotus quoque erit ad decades. Tum divido 4 per 2; & fit quotus 2 & quia dividuntur unitates quotus erit ad unitates. Conjungantur ſimul quoti inventi, & fiet 3 2 quotus quæſitus; nempe 3 decades, & 2 unitates.

Eadem

Eadem methodo utendum ſi tres vel quatuor cyphræ ſint dividendæ per unam.

3. Sint autem duæ dividendæ per duas.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Numerus dividendus | A | 4 | 6 |
| Diviſor | B | 2 | 3 |
| Quotus 2 | | | |

Obſervetur quoties prima cyphra diviſoris contineatur in prima cyphra dividendi, & notetur quotus. Sic quoniam 2 continetur bis in 4; notetur quotus 2. Tum quæratur an totus diviſor contineatur bis in dividendo, quod fit multiplicando illum per 2; & quoniam productum eſt 46, concludetur illum exacte bis contineri; nempe quotum eſſe 2.

Quod ſi productum eſſet majus, tum quotus aſſumptus erit major, quam conveniat, ac proinde unitate erit minuendus. Sic ſi dividi debeat 45 per 23 verum eſt quidem decades 2 contineri bis in decadibus 4; & earum quotum eſſe 2. Sed totus diviſor non continetur bis in dividendo. Nam multiplicato diviſore per 2 fit 46.

4. Si tres cyphræ ſint dividendæ per duas; divido primum duas incipiendo a ſiniſtra, & noto quotum, hinc multiplico totum diviſorem per inventum quotum; tertio ſubtraho productum. Reſiduo addita ſequenti cyphra repetatur eodem modo diviſio.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Sit numerus A | A | 7 | 6 | 8 |
| Dividendus per B | B | 2 | 4 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dividatur primo 7 6 per 2 4, & fit primus quotus 3 | Pars prima | 7 | 6 |
| | Diviſor | 2 | 4 |
| | Quotus primus | | 3 |

Multiplicetur inde 24 per 3 & ſit 72, quo ſubtracto a 76, reſiduum eſt 4.

Notato 4 addatur illi 8 & erit

| | |
|---|---|
| Pars ſecunda dividenda | 48 |
| Diviſor | 24 |
| Quotus ſecundus | 2 |
| Reſiduum ſecundum | 0 |

Quotus vero totalis eſt 32.

5. Si tres cyphræ dividendæ ſint per tres cyphras dividatur ſemper prima per primam ad ſiniſtram, inde probetur an totus diviſor toties contineatur in toto dividendo, quoties prima cyphra continetur in prima. Quod ſi productum fiat majus tum minuatur quotus unitate.

6. Eadem methodo quatuor cyphræ dividentur per tres, & quinque per quatuor: & intellecta methodo in caſibus ſimplicioribus, facile erit applicare ad quemlibet alium.

## *SCHOLION.*

MUltiplicatio diviſione probatur, & diviſio multiplicatione. Etenim ſi multiplicando 2 per 3 fit 6; dividendo ergo 6 per 2 fiet 3, aut dividendo 6 per 3 fiet 2.

E contrario ſi dividendo 6 per 3, quotus eſt 2; Ergo multiplicando 3 per 2 fiet 6.

DE

# DE PRIMO ALGORITHMO LITTERALI.

## CAPUT II.

VEluti per Arabicos characteres exprimuntur quantitates determinatæ ita per litteras exprimuntur indeterminatæ,

Antequam hujuſcemodi methodos explicemus, notabimus primo quamlibet quæſtionem, quæ poteſt proponi vel eſſe *poſſibilem* vel *impoſſibilem*. Poſſibilem ut ſi quæratur quidnam ſit dimidium *6*, impoſſibilem ut ſi quæratur dimidium *6* quod ſit numerus par.

Cum quæſtio eſt poſſibilis triplex eſſe poteſt. Vel enim ei reſpondet quantitas poſitiva, vel quantitas negativa, vel nulla. Si quæratur quantum habeat Petrus in bonis? tria dari poſſunt; vel ut aliquid habeat, vel ut non ſolum non habeat, imo aliquid debeat; vel quod nec habeat, nec debeat; In primo caſu facultas Petri dicitur poſitiva, in ſecundo negativa; in tertio zero.

Ita ſi quæratur quantum ſpatii peragratum fuerit ab aliquo Mobili verſus dexteram, & revera ille duas hexapedas ad hanc partem confecerit, motus ejus erit poſitivus. At ſi non ſolum non progreſſus eſt verſus dexteram, ſed e contrario verſus ſiniſtram, motus erit negativus. Si vero neque ad dexteram, neque ad ſiniſtram, ſed in quiete permanſerit, tum motus fiet zero.

Quan-

Quantitates poſitivæ exprimuntur ſigno +, vel etiam ſine ſigno, negativæ ſigno −

Signum = exprimit æquale. Signum > majus, ſignum < minus; & ∞ infinitum.

## *AXIOMA FUNDAMENTALE.*

QUantitas poſitiva cum quantitate negativa æquali facit zero. Sic $4 - 4$, $a - a$, $b - b$ dant zero.

## PROBLEMA I.

### *Addere Litteras.*

1. SCribatur una poſt aliam cum ſuis ſignis.
2. Pluresque termini ejuſdem ſpeciei reducantur ad unum.

## *EXEMPLUM I.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Litteræ | $a$ | $3a$ | $3a$ |
| Addendæ | $b$ | $-3a$ | $-2a$ |
| Summæ | $a+b$ | $3a-3a$ | $3a-2a$ |
| Summæ reductæ | $a+b$ | $0$ | $a$ |

*EXEM-*

### EXEMPLUM II.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Litteræ | 3*a* | 7*c* | − 3*a* |
| Addendæ | 4*a* | − 7*c* | − 2*a* |
| Summæ | 7*a* | 0 | − 5*a* |

## PROBLEMA II.

*Litteras Subtrahere.*

1. SCribatur una poſt aliam ſed in iis quæ ſubtrahentur mutentur ſigna.
2. Reducantur termini ejuſdem ſpeciei ad unum.

### EXEMPLUM I.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Litteræ datæ | *a* | 8*a* | − 4*c* |
| Litteræ ſubtrahendæ | *b* | 8*a* | + 3*c* |
| Differentiæ primæ | *a* − *b* | 8*a* − 8*a* | − 4*c* − 3*c* |
| Differentiæ reductæ | *a* − *b* | 0 | − 7*c* |

### EXEMPLUM II.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Litteræ datæ | 3*d* | 3*d* | 4*c* |
| Litteræ ſubtrahendæ | 4*c* | 3*d* | 7*c* |
| Differentiæ primæ | 3*d* − 4*c* | 3*d* − 3*d* | 4*c* − 7*c* |
| Differentiæ reductæ | 3*d* − 4*c* | 0 | − 3*c* |

Quantitas litteralis ſola dicitur *Monomium*, ut *a*. Quum duæ junguntur vel ſigno +, vel −, tum fit *Binomium*, ut *a* + *b*, vel *a* − *b*; Cum tres jungun-

guntur *Trinomium*, ut $a + b + c$, vel $a + b - c$. Et Univerſaliter cum plures *Polynomium*.

## PROBLEMA III.

*Multiplicare Litteras.*

Multiplicatio exprimitur jungendo litteras vel cum ſigno $\times$, vel etiam ſine ſigno, quod uſitatius eſt.

Oportet autem agnoſcere quodnam ſignum apponendum ſit producto. Quare quatuor caſus ſunt diſtinguendi. 1. cum multiplicatur poſitiva quantitas per poſitivam pariter quantitatem. 2. cum negativa per negativam. 3. cum poſitiva per negativam. 4. cum negativa per poſitivam.

Quoniam vero quantitatem multiplicare eſt idem ac aliquoties illam repetere; ſi poſitiva aliquoties repetitur poſitive, clarum eſt fieri ſemper quantitatem poſitivam. At ſi negativa repetitur aliquoties; fiet ſemper negativa. Sic pariter ſi poſitiva aliquoties negetur fiet aliquid negativum.

Sed ſi aliquid negativum aliquoties negative ſumatur idem eſt ac negare negativum aliquoties. Quare exurget quantitas poſitiva.

Ex quibus ſequentes regulæ fiunt

1. Poſitivum per poſitivum dat $+$
2. Poſitivum per negativum dat $-$
3. Negativum per poſitivum dat $-$
4. Negativum per negativum dat $+$

Mo-

### *Monomium per Monomium multiplicare.*

Jungantur ſimul litteræ, & ponatur producto ſignum juxta ſupradictas regulas conveniens.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Monomia | $a$<br>$b$ | $a$<br>$-b$ | $-a$<br>$b$ | $-a$<br>$-b$ |
| Producta | $+ab$ | $-ab$ | $-ab$ | $+ab$ |

### *Monomium per Binomium.*

Multiplicetur utraque littera, hinc addantur producta ut in numeris

| | |
|---|---|
| Binomium multiplicandum | $a+b$ |
| Monomium multiplicans | $c$ |
| Productum primum | $ac$ |
| Productum ſecundum | $bc$ |
| Productum totale | $ac+bc$ |

### *Binomium per Binomium.*

Multiplicetur binomium datum per primam litteram alterius, hinc per ſecundam

| | |
|---|---|
| Binomium multiplicandum | $a+b$ |
| Binomium multiplicans | $c+d$ |
| Productum primum | $ac+bc$ |
| Productum ſecundum | $ad+bd$ |
| Productum totale | $ac+bc+ad+bd$ |

*Aliud*

*Aliud exemplum.*

| | |
|---|---|
| Binomium multiplicandum | $a + b$ |
| Binomium multiplicans | $a - b$ |
| Productum primum | $aa + ab$ |
| Productum ſecundum | $- ab - bb$ |
| Productum totale | $aa - bb$ |

*Exemplum Tertium.*

| | |
|---|---|
| Trinomium multiplicandum | $a - b + c$ |
| Binomium multiplicans | $a + b$ |
| Productum primum | $aa - ab + ac$ |
| Productum ſecundum | $+ ab - bb + bc$ |
| Productum totale | $aa - bb + ac + bc$ |

Eadem methodus in quibuslibet Polynomiis.

## PROBLEMA IV.

### Litteras dividere.

*Monomium per Monomium.*

1. Sit $a$ dividenda per $b$. Scribatur $a : b$, vel $\frac{a}{b}$

2. Deleantur litteræ communes tam dividendo, quam diviſori ut fit in figura

Di-

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dividendi | $aa$ | $abc$ | $aac$ |
| Diviſores | $ab$ | $ab$ | $aac$ |
| Quoti primi | $\frac{aa}{ab}$ | $\frac{abc}{ab}$ | $\frac{aac}{aac}$ |
| Quoti ſimplices | $\frac{a}{b}$ | $c$ | $\frac{1}{1}$ |

3. Oportet autem ſigna convenientia quotis apponere, quod fit juxta regulas multiplicationis

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dividendi | $aac$ | $-aabb$ | $-aabb$ |
| Diviſores | $-aa$ | $ab$ | $-ab$ |
| Quoti | $-c$ | $-ab$ | $+ab$ |

*Binomium per Monomium.*

Dividantur ambæ partes Binomii & ſumma quotorum erit quotus quæſitus

| | |
|---|---|
| Binomium dividendum | $ab + ac$ |
| Monomium dividens | $a$ |
| Quotus primus | $a$ |
| Quotus ſecundus | $c$ |
| Quotus totalis quæſitus | $a + c$ |

*Binomium per Binomium.*

Dividatur prima pars unius per primam partem alterius, & procedatur ut in numeris

| | |
|---|---|
| Binomium dividendum | $aa - bb$ |
| Binomium dividens | $a + b$ |
| Pars prima dividenda | $aa$ |
| Diviſoris pars prima | $a$ |
| Quotus primus | $a$ |
| Productum primum | $aa + ab$ |
| Reſiduum primum | $- ab$ |
| Pars ſecunda dividenda | $- ab - bb$ |
| Diviſor | $a + b$ |
| Quotus ſecundus | $- b$ |
| Productum ſecundum | $- ab - bb$ |
| Reſiduum ſecundum | $0$ |
| Quotus totalis quæſitus | $a - b$ |

*Trinomium per Binomium.*

| | |
|---|---|
| Trinomium dividendum | $aa + 2ab + bb$ |
| Binomium dividens | $a + b$ |
| Pars prima dividenda | $aa$ |
| Diviſor | $a + b$ |
| Quotus primus | $a$ |
| Productum primum | $aa + ab$ |
| Reſiduum primum | $ab + bb$ |
| Diviſor | $a + b$ |
| Quotus ſecundus | $+ b$ |
| Productum ſecundum | $ab + bb$ |
| Reſiduum | $0$ |
| Quotus ergo totalis | $a + b$ |

Si ultimum reſiduum non fit zero, tum quantitas non erit exacte diviſibilis per datam quantitatem & tum exprimetur diviſio ut factum eſt in Monomiis.

Sic

Sic ſi $ab + cd$ dividi debeat per $bb$: quoniam exacte dividi non poteſt ſcribatur $\frac{ab + cd}{bb}$

Eadem methodus in Polynomiis majoribus.

## *DE POTESTATIBUS ARITHMETICIS. ET EARUM RADICIBUS.*

## CAPUT III.

Multiplicetur unitas 1 per quemcumque numerum, ut 2, ita ut fiat productum 2: hoc productum rurſus multiplicetur per 2, ut fiat ſecundum productum 4; & hoc per 2, ut fiat tertium productum 8 ut videre eſt in figura

| | |
|---|---|
| Unitas | 1 |
| Productum primum | 1.2 |
| Secundum | 1.2.2 |
| Tertium | 1.2.2.2 |
| Quartum | 1.2.2.2.2 |
| Quintum | 1.2.2.2.2.2 |
| Sextum | 1.2.2.2.2.2.2 |
| Quodcunque | 1.2.2......... |

Hujuſmodi producta vocata ſunt a veteribus *Poteſtates*, *ſeu Dignitates* Arithmeticæ. Quantitas vero, per quam fit multiplicatio *Radix*, aut *Latus*.

Productum primum eſt ipſa quantitas multiplicans; quare dicitur etiam Radix, aut Latus. Productum ſecundum dictum eſt *Quadratum*, tertium *Cubus*, quartum *Surſolidus primus*, quintum *Quadrato — cubus*; ſextum *Surſolidus ſecundus* &c.

Unitas vero dicitur poteſtas *Nulla*; quia aſſumendo unitatem, cum unitas nondum multiplicata eſt per aliam quantitatem, nondum facta eſt ulla Poteſtas.

Radix vero ſecundum quod ad diverſas poteſtates refertur nomen mutat. Relative enim ad poteſtatem ſecundam dicitur Radix *ſecunda*, aut *quadrata*. Relative ad tertiam radix *tertia*, aut *cubica*, ut radix *quarta*, *quinta* &c.

Si quæratur ergo radix ſecunda numeri 4, idem eſt ac quærere numerum qui per duas multiplicationes incipiendo ab unitate producat 4; & erit 2. Si quæratur radix tertia 8 idem erit ac quærere numerum qui per tres multiplicationes faciat 8; & erit pariter 2. Et ſi quæratur radix quarta 16; quæretur numerus, qui per quatuor multiplicationes producat 16, & erit pariter 2.

## COROLLARIUM I.

Ex quibus ſequitur non cujuſcunque numeri inveniri ſemper poſſe numerum, qui ſit quæſita radix. Sic aſſignari non poteſt in numeris quarta radix numeri 17 quia nullus eſt numerus, qui per quatuor multiplicationes producat 17; nec pariter radix tertia, nec ſecunda; quia nullus numerus eſt qui per duas, vel tres multiplicationes 17 producat.

At numeri 16 poteſt & ſecunda radix aſſignari, quæ eſt 4; & pariter radix quarta, quæ eſt 2 Nam ſi unitas multiplicetur per 4, & productum 4 adhuc multiplicetur per 4, fit 16. Sic ſi quatuor fiant multiplicationes per 2.

## COROLLARIUM II.

EX quibus fit, ut diſtinguantur duo Radicum genera; aliæ enim ſunt *Irrationales*, aut *Surdæ*, aliæ *Rationales*, aut *Numericæ*. Sic radix quadrata 18 eſt radix ſurda, quia numeris non poteſt exprimi, radix vero quadrata 16 eſt rationalis, quia numeris poteſt exhiberi, & eſt 4. Sic radix cubica 20 eſt radix ſurda; at radix cubica 27 eſt rationalis, & eſt 3.

Quemadmodum autem dantur quantitates quarum ſunt radices vel *Irrationales*, vel *Rationales*; ita dantur quantitates, quarum nulla omnino eſt radix, neque eſſe poteſt.

Ita ſi quæratur radix quadrata − 8; problema eſt impoſſibile. Cum nulla aſſignari poſſit quantitas quæ per ſe producat quantitatem − 8. Vel enim hæc quantitas eſt poſitiva vel negativa. Et quoniam poſitivum productum per poſitivum dat poſitivum, impoſſibile erit, ut hujuſcemodi quantitas per ſe producta faciat negativam quantitatem, & producat − 8. Similiter ſi eſt negativa, negativum enim productum per negativum dat poſitivum, ac proinde impoſſibile erit ut producat − 8. Si inveniatur ergo aliqua quantitas quæ ſit radix quadrata − 8, erit ea quantitas impoſſibilis, quod argumento erit problema propoſitum eſſe impoſſibile.

Talis quoque erit radix biquadratica quantitatum negativarum: ut radix biquadratica quantitatis − 8; & tales generaliter quæcunque radices quorum exponens eſt numerus par, ſi quantitas ex qua extrahi debent, ſit negativa.

Hujuſmodi Radices vocantur *Impoſſibiles*, aut *Ima-*

*gina-*

*ginariæ*, quorum tamen eſt maximus uſus in Arithmetica, & Geometria. Nam in Arithmetica demonſtrant impoſſibilitatem Problematum; & in Geometria flexus, & curvaturas curvarum.

Ex quibus infertur differentia inter radices rationales, irrationales, & imaginarias.

*Rationales* enim ſunt eæ quæ in numeris exhiberi poſſunt. *Irrationales*, quæ non poſſunt quidem exhiberi in numeris, ſed per figuras Geometricas exhibentur in lineis. Demum *Imaginariæ* quæ neque in numeris poſſunt exhiberi, neque in lineis; cum ſint quantitates repugnantes, & quæ contradictionem involvunt. Cujuſcunque autem generis ſunt radices exprimi ſolent per ſignum $\sqrt{\ }$ appoſito numero ſuper ſignum, quo indicatur ordo radicis. Sic $\sqrt[2]{12}$ ſignificat radicem ſecundam, ſive quadratam numeri 12. $\sqrt[3]{12}$ ſignificat radicem tertiam, ſive cubicam. $\sqrt[4]{12}$ radicem quartam, ſive biquadraticam. $\sqrt[2]{-12}$ radicem quadratam quantitatis $-12$; quæ imaginaria eſt. $\sqrt[4]{-12}$ radicem quartam, quæ pariter eſt imaginaria. Cum autem deficit index, intelligitur ſemper eſſe radix quadrata.

*Ta-*

*Tabula poteſtatum in numeris.*

| Unitas | Poteſtates primæ | Secundæ | Tertiæ | Quartæ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 |
| 1 | 3 | 9 | 27 | 81 |
| 1 | 4 | 16 | 64 | 256 |
| 1 | 5 | 25 | 125 | 625 |
| 1 | 6 | 36 | 216 | 1296 |
| 1 | 7 | 49 | 343 | 2401 |
| 1 | 8 | 64 | 512 | 4096 |
| 1 | 9 | 81 | 729 | 6561 |
| 1 | 10 | 100 | 1000 | 10000 |

*Tabula poteſtatum litteralium.*

| Unitas | Primæ | Secundæ | Tertiæ | Quartæ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | *a* | *aa* | *aaa* | *aaaa* |
| 1 | *ab* | *aabb* | *aaabbb* | *aaaabbbb* |
| 1 | *abc* | *aabbcc* | *aaabbbccc* | *aaaabbbbcccc* |
| 1 | *aa* | *aaaa* | *aaaaaa* | *aaaaaaaa* |

## PROBLEMA I.

*Extrahere radicem quadratam ex dato quadrato.*

SIt primo binomium $a + b$, & per ſe ipſum multiplicetur fiet ejus quadratum $aa + 2ab + bb$ cujus tria ſunt elementa; nempe $aa$ quadratum primæ litteræ, $2ab$ productum ex dupla prima in ſecundam, & $bb$ quadratum ſecundæ.

Ex

Ex his elementis oritur methodus radicem quadratam ex quocunque quadrato extrahendi binomiam.

Sit enim aliud quadratum $xx + 2xy + yy$

Quoniam $xx$ eſt quadratum primæ litteræ, ejus radix $x$ erit prima littera; ſubtracto elemento $xx$ fit reſiduum $2xy + yy$. Et quoniam ibi datur productum ex dupla prima in ſecundam dividatur $2xy$ per $2x$, & quotus erit ſecunda littera $y$. Tum multiplicetur $y$ per $2x$, addaturque quadratum $yy$ ut fiat $2xy + yy$. Et ſubtrahendo hæc elementa fit reſiduum zero; Quare $x + y$ erit quæſita radix quadrata; ut eſt in figura

Quadratum datum $xx + 2xy + yy$ | Prima littera $x$

Elementum ſubtractum $xx$

Reſiduum primum $2xy + yy$

Diviſor $2x$ | Secunda littera $+ y$

Quotus $+ y$

Elementa ſubtrahenda $2xy + yy$

Reſiduum ſecundum $0$

Sit ſecundo loco trinomium $a + b + c$, eritque ejus quadratum $aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc$ cujus hæc ſunt elementa $aa$ quadratum primæ litteræ, $2ab$ productum ex dupla prima in ſecundam, $bb$ quadratum ſecundæ, $2ac + 2bc$; nempe productum ex ſumma dupla duarum in tertiam. Denique $cc$ quadratum tertiæ.

Ex quibus elementis oritur methodus extrahendi radicem trinomiam.

Sit enim quodcunque quadratum $xx + 2xy + yy + 2xz + 2yz + zz$

Et quoniam $xx$ eſt quadratum primæ, erit $x$ prima. Subtracto $xx$ divido $2xy$ per $2x$, & prodit

dit ſecunda $+y$. Subtractis $2xy+yy$, fit reſiduum $2xz+2yz+zz$; & diviſo primo termino per $2x+2y$ prodit tertia littera $z$. Subtractiſque elementis $2xz+2yz+zz$, reſiduum fit zero. Quare radix trinomia quæſita eſt $x+y+z$. Eadem methodo extrahantur quadrinomiæ, & polynomiæ quælibet.

*Applicatio methodi ad numeros.*

Sit numerus binomialis 32, ſeu 30 + 2. Quoniam ergo ejus quadratus debet continere quadratum primæ, & duplex productum primæ & ſecundæ & quadratum ſecundæ, erunt elementa hujuſce quadrati, ut in figura

| | | |
|---|---|---|
| Quadratum primæ | = | 900 |
| Duplex productum primæ & ſecundæ | | 120 |
| Quadratum ſecundæ | | 4 |
| Quadratum quæſitum | | 1024 |

Ibi autem obſervandum quod maxima radix monomia 9 quadratum ſuum non extendit ultra duas cyphras, & fit 81. & maxima radix binomia, quæ eſt 99 quadratum ſuum ultra quatuor cyphras non extendit, & maxima trinomia 999 non ultra ſex, & maxima quadrinomia non ultra 8.

Ex quibus fit ut ſi detur quadratum in quo cyphræ ſint plures quam duæ, habebit radicem plus quam monomiam, & ſi habeat plures quam quatuor, erit radix ejus pluſquam binomia.

Unde prodit regula cognoſcendi cujuſnam ſpeciei debeat eſſe radix. Dividantur enim cyphræ quadrati dati in binas binas, & quot erunt diviſiones, tot in radice erunt cyphræ.

Sic quia 23. 45. 67. 89. diviſiones quatuor admittit, quatuor erunt cyphræ in radice & numeri 7. 96. 40. 97. 45. 67. quia ſex ſunt diviſiones radix erit ſexinomia.

Ut autem ſitus elementorum in dato numero cognoſcatur illud erit obſervandum.

1. Quod quadratum unitatum dat unitates.

2. Productum decadum per unitates dat decades.

3. Quadratum decadum dat centenaria.

4. Productum decadum per centenaria dat milliaria.

5. Quadratum ex centenariis dat decem milliaria, & ſic procedendo.

Quibus intellectis ſit numerus 1156, ex quo debeat extrahi quadrata radix. Et primo quoniam 4 ibi ſunt cyphræ, radix erit binomia. Secundo quoniam quadratum primæ radicis eſt in centenariis quæratur in 11 maximus quadratus, qui eſt 9; & ejus radix 3 erit prima cyphra quæſita. Subtracto quadrato 9 ab 11 reſiduum eſt 2, cui addatur 5, & fit 25. Quoniam ergo hic debet eſſe productum ex dupla prima in ſecundam, dividatur 25 per 6, & erit ſecunda cyphra 4. Subtracto demum 24 a 25 fit reſiduum 1, cui additis 6 unitatibus, fiunt 16 unitates, in quibus debet contineri quadratum ſecundæ cyphræ; quod eſt 16. Quare 4 erit ſecunda cyphra, & radix quæſita 34.

Sit ſecundo loco 3 3 1 2 4 cujus quæratur radix quadrata & quoniam numerus continet quinque cyphras, radix erit trinomia.

Maximus quadratus in 3 eſt 1, cujus radix eſt

1, quæ erit prima cyphra radicis.

Subtracto 1 à 3 fit reſiduum 2, cui addendo 3 fit 23. Dividatur ergo 23 per 2, & ponatur quotus 8; qui erit ſecunda cyphra. Multiplicato autem 8 per 2, fit 16, quo ſubtracto de 23, reſiduum eſt 7, cui addito 1 fit 71 ſedes quadrati ſecundæ. Subtracto ergo 64 a 71 reſiduum eſt 7, qui addito 2 fit 72. Diviſo mox 72 per duplum ſummæ cyphrarum, quæ jam inventæ ſunt nempe per 36, erit quotus 2: nempe tertia cyphra. Subtracto ergo 72 a 72 reſiduum fit zero. Sed in unitatibus debet inveniri quadratum 4 tertiæ cyphræ, quod exacte invenitur. Quare 2 erit tertia cyphra; radixque quæſita erit 182. Eadem methodus eſt in quolibet alio quadrato.

## *S C H O L I O N.*

SI ultimum reſiduum ſit aliquid, numerus non erit quadratus perfectus; neque radix poterit educi niſi ex maximo quadrato qui in ipſo continetur.

## P R O B L E M A II.

EXtrahere radicem cubicam.

Si binomii $a + b$ fiat cubus, erit $aaa + 3aab + 3abb + bbb$ cujus elementa ſunt cubus primæ litteræ, tres quadrati primæ litteræ multiplicati per ſecundam, tres quadrati ſecundæ multiplicati per primam, & cubus ſecundæ.

Unde oritur methodus extrahendi radicem cubicam.

Sit enim $xxx + 3xxy + 3yyx + yyy$ cujus

jus extrahenda ſit cubica radix. Quoniam datur cubus primæ educatur radix cubica ex $xxx$, & erit $x$ prima cyphra. Subtracto $xxx$ ſit reſiduum $3zzy + 3yyx + yyy$. Et quoniam debet eſſe ibi productum ex tribus quadratis primæ in ſecundam dividatur $3xxy$ per $3xx$, & prodit $y$. Oportet autem ut in quantitate data ſint adhuc elementa $3yyx + yyy$ quæ cum contineantur exacte, $y$ erit ſecunda cyphra & radix cubica quæſita erit $x + y$.

Eadem methodo ſi fiat cubus ex radice trinomia agnoſcentur ejus elementa, quibus agnitis educi poteſt radix trinomia.

*Applicatio methodi ad numeros.*

In numeris eadem ſunt elementa, ac in litteris; ſed obſervandus elementorum ſitus ubi notetur.

1. Quod cubus unitatum dat unitates.

2. Quadratum unitatum per decades dat decades.

3. Quadratum decadum per unitates dat centenaria.

4. Cubus decadum dat milliaria.

5. Centenaria quadrata per decades dant centimilliaria.

6. Cubus ex centenariis dat millionem.

Obſervandum præterea cujuſnam ſpeciei ſit radix extrahenda. Cum enim maximum monomium numericum ſit 9, cujus cubus eſt 729., ex tribus nempe cyphris conſtans; ſequitur quod ſi datus cubus habeat plus quam tres cyphras, radix ejus erit plus quam monomia. Cumque ma-

ximum binomium ſit 99 ; cujus cubus ad ſex cyphras aſcendit, ſequitur quod ſi dato numero adſint plus quam ſex cyphræ, radix cubica ſit plus quam binomia. Eodem modo cum maximum trinomium ſit 999 cujus cubus ad novem cyphras aſcendit, ſi datus numerus ſit ultra novem cyphas, radix ejus erit pluſquam trinomia.

Ut autem cognoſcatur cujus ſpeciei ſit radix, fiat diviſio cyphrarum pro ſingulis ternis, & quot erunt claſſes, tot erunt cyphræ in radice quæſita.

Sic in dato numero 7. 432. 456. quia tres ſunt claſſes, radix erit trinomia.

Et in numero 3. 456. 789. 100. 113 quia quinque ſunt claſſes, erit quinquinomia.

Sit nunc numerus 32 768 ex quo debeat extrahi radix cubica.

Dividatur ergo in ſuas claſſes & quoniam ſunt claſſes duæ erit radix binomia.

Quæratur quiſnam ſit maximus cubus in 32, & erit 27, cujus radix cubica eſt 3, quæ erit cyphra prima radicis quæſitæ.

Subtracto cubo 27 a 32 fit reſiduum 5, cui addito 7, fiet 57. Oportet autem ipſum dividere per triplum quadratum primæ, nempe per 27, & habetur quotus 2. Subtracto 54 fit reſiduum 3, cui addito 6 fit 36, & ibi debet eſſe productum ex triplo quadrato ſecundæ in primam 36, & reſiduum fit zero.

In unitatibus autem debet eſſe cubus ſecundæ, nempe 8, & præciſe invenitur. Quare radix cubica eſt 32.

Eadem methodo extrahetur trinomia, & quadrinomia.

SCHO-

## SCHOLION.

SI binomium elevetur ad quadrato quadratum, vel ad poteſtatem quintam, aut ſextam & cognoſcentur eorum elementa, & educi poterit methodus eruendi radices quartas, quintas &c. abſque eo quod amplius in rebus hujuſmodi immoremur.

Quod ſi exacte requiſita elementa in dato numero non contineantur, tum datus numerus non erit vera poteſtas; neque proinde poterit ab ipſo extrahi vera radix. Tumque extrahitur ex maxima poteſtate, quæ continetur in dato numero.

## DE PRIMA ANALYSI ARITHMETICA.

## CAPUT IV.

### *Definitiones.*

1. ANalyſis Arithmetica eſt Scientia reſolvendi omnia Problemata Arithmetica. Methodus autem eſt *Æquatio*.

2. *Æquatio* dicitur comparatio duarum quantitatum æqualium ut ſi ſit $a = b$. Quare omnis Æquatio ex duabus partibus, ſive membris conſtat. Pars quæ comparatur, & pars cui comparatur.

3. Si elementa ex quibus conſtat Æquatio ſint unius dimenſionis Æquatio dicitur *ſimplex*, ſi plurium dimenſionum dicitur *compoſita*. Ex quo fit ut ſecundum numerum dimenſionum diſtinguantur etiam problemata.

Nunc de ſimplicibus agendum, de compoſitis acturi ſuo loco.

AXIO-

## AXIOMATA.

1. SI duobus æqualibus æqualia addantur, remanet æqualitas.

2. Si ex duobus æqualibus ſubtrahantur æqualia, remanet æqualitas.

3. Si duo æqualia multiplicantur per æqualia, fit æqualitas.

4. Si duo æqualia dividantur per æqualia, fit æqualitas.

5. Duorum æqualium poteſtates ſimiles ſunt æquales.

6. Duorum æqualium radices ſimiles ſunt æquales.

7. Quæ ſunt æqualia tertio, æqualia ſunt inter ſe.

8. Si loco æqualis ſubſtituatur æquale, remanet æqualitas.

### *Regulæ generales Analyſis.*

1. Quantitates quæſitæ exprimantur ultimis Alphabeti litteris $x$, $y$, $z$. Quantitates cognitæ vel per numeros, vel per primas Alphabeti litteras $a$, $b$, $c$.

Quæritur exempli gratia fundum Petri, & fundum Pauli. Fundum Petri ponitur quadruplum fundi Pauli, & amplius habet 7. Et ſumma utriuſque fundi eſt 32.

2. Exponatur Problema ſecundum conditiones, quibus proponitur. Vocetur ergo fundum Petri $x$, & fundum Pauli erit $4x + 7$. Quare ſecundum conditionem Problematis $x + 4x + 7 = 32$.

3. Tum

3. Tum educendus erit valor litteræ $x$. Sic in noſtro caſu dempto 7 ab utroque membro fit $x + 4x = 25$ ſeu $5x = 25$ & dividendo utrunque membrum per 5, fit $x = 5$. Erit ergo fundum Petri 5, fundum Pauli 27.

4. Ut evolvatur valor incognitæ reducantur omnes termini, in quibus ipſa incognita reperitur ad unam partem; & ad unum ſi fieri poteſt reducantur.

Sic in allato exemplo; quoniam habetur $x + 4x + 7 = 32$ fiat $5x + 7 = 32$.

Terminus incognitus ſeparetur a cognitis. Subtrahendo ergo 7 ab utroque membro fit $5x = 25$

Si multiplicatur $x$ per numerum, dividatur utrunque membrum per ipſum numerum; diviſis ergo membris per 5, fit $x = 5$.

Si termini incogniti involvantur cum terminis cognitis negativis, per additionem fiet reductio.

Ut ſi habeatur $4x - 8 = 40$ addendo utrique membro 8 fiet $4x = 48$

Si incognita diviſa eſt per numerum, multiplicando fiet reductio. Ut ſi habeatur $\frac{x}{3} = 6$ multiplicando utrunque membrum per 3, fiet $x = 18$.

5. Si dentur plures litteræ incognitæ, opus eſt illas exterminare, & ſi fieri poteſt ad unam reducere, quod fit per ſubſtitutionem.

Ita ſi detur $x + y = 10$

& $x = 4y$

Subſtituendo in prima Æquatione $4y$ loco $x$, habebitur $5y = 10$ & fiet $y = 2$.

Quæ quidem ſunt regulæ generales Analyſis in reſolvendis problematibus, ſed earum uſus peritiam

quan-

quandam, & induſtriam requirit; quod exemplis magis declarabimus.

# SECTIO II.

## DE RATIONE, ET PROPORTIONE ARITHMETICA.

### CAPUT I.

*Definitiones.*

1. Cum quantitatem aliquam cum altera comparamus, tum generaliter dicimus conſiderare unius ad alteram relationem, aut rationem.

2. Hujuſmodi autem relationes poſſunt eſſe diverſæ. At ſi comparando duas quantitates, earum differentias præciſe conſideramus, tum fit comparatio Arithmetica. Ut ſi comparemus 3 cum 10; & conſideramus præciſe quænam differentia inter 3, & 10 intercedat; tum dicimus conſiderare horum numerorum rationem Arithmeticam.

3. Quare, omnis ratio Arithmetica duos terminos importat. Primus dicitur *Antecedens*, alter *Conſequens*.

4. Unde oritur *Arithmetica proportio* quæ in duabus rationibus Arithmeticis æqualibus poſita eſt.

 Ita

Ita quoniam inter 3, & 5 eadem differentia intercedit ac inter 17, & 19; inter hujuſcemodi numeros dicitur eſſe Arithmetica proportio, atque iidem numeri vocantur Arithmetice proportionales. Ex quo fit ut quemadmodum ratio Arithmetica importat duas quantitates ita proportio Arithmetica quatuor.

5. Si ex quatuor quantitatibus ſingulæ ſint diverſæ, Proportio dicitur *Diſcreta*; ut ea quæ intercedit inter 3, 5, 17, 19. At ſi una bis repetatur, tum eſt *Continua* ut inter 3, 5, 7.

6. Quantitates ejuſdem ordinis vocantur *homologhæ*, ſic 3, & 17 in allato exemplo ſunt homologhæ inter ſe; quia ambæ ſunt antecedentes; & pariter 5, & 19 quia ambæ ſunt conſequentes. $a, b \doteqdot c, d$ repræſentet omnem proportionem Arithmeticam. Et quoniam ſi differentia dicatur $x$, loco $a$ poterit ſemper ſubſtitui $b+x$, & loco $c$ poterit ſubſtitui $d+x$. Quare

$$b+x, b \doteqdot d+x, d$$

repreſentabit quoque omnem proportionem Arithmeticam.

## *THEOREMA FUNDAMENTALE.*

Si ſint quatuor quantitates Arithmeticæ proportionales, ſumma extremarum æquatur ſummæ mediarum:

Sit $a, b \doteqdot c, d$

Dico quod $a+d \doteqdot b+c$

Mutentur enim termini, & fiat $b+x, b \doteqdot d+x, d$

Et erit ſumma extremorum $b+d+x$

Summa mediorum $b+d+x$.

Sint $2, 3 \doteqdot 5, 6$

Summa extremorum 8

Summa mediorum 8

## *COROLLARIUM.*

Si termini ſint in proportione continua Arithmetica, ſumma extremorum eſt dupla medii.

| | |
|---|---|
| Sint enim | $a, b = b, d$ |
| Ergo | $a + d = 2b$ |
| Sint | $3, 4 = 4, 5$ |
| Summa extremorum | 8 |
| duplum medium | 8 |

## PROBLEMA I.

Datis tribus quantitatibus invenire quartam proportionalem Arithmeticam. Sint tres numeri 3, 7, 9, quibus oporteat invenire quartum proportionalem Arithmeticum. Sit ille $x$

| | |
|---|---|
| Erit ergo | $3, 7 = 9, x$ |
| Quare | $3 + x = 16$ |
| Et ſubtrahendo 3 fit | $x = 13$ |

### *Univerſaliter.*

Sint datæ $a$, $b$, $c$; quarta quæſita $x$

| | |
|---|---|
| Ergo | $a, b = c, x$ |
| Quare | $a + x = b + c$ |
| Et | $x = b + c - a$ |

## PROBLEMA II.

Datis duabus quantitatibus invenire tertiam continue proportionalem Arithmeticam.

Sint dati duo numeri 3, 5, & tertius proportionalis $x$

 Erit

Erit ergo $3, 5 = 5, x$
Quare $3 + x = 10$
Et $x = 7$

*Univerſaliter.*

Sint datæ $a$, & $b$, tertia $x$
Ergo $a, b = b, x$
Quare $a + x = 2b$
Et $x = 2b - a$

## PROBLEMA III.

Datis duabus quantitatibus invenire mediam proportionalem Arithmeticam.

Sint dati $3$, & $7$; medius quæſitus $x$
Ergo $3, x = x, 7$
Quare $10 = 2x$, & $x = 5$

*Univerſaliter.*

Sint datæ quantitates $a$, $b$, quæſita $x$
Ergo $a, x = x, b$
Ergo $a + b = 2x$
Et $x = \frac{a + b}{2}$

# *DE RATIONE, ET PROPORTIONE GEOMETRICA.*

## CAPUT II.

### *Definitiones.*

1. Cum comparamus duas quantitates inter ſe, & conſideramus quoties una contineatur in altera tum fit ratio Geometrica, ut ſi comparemur 12 ad 4; & conſideremus quoties 12 contineat 4.

2. Omnis ergo ratio Geometrica duos terminos importat, alter vocatur *Antecedens*, alter *Conſequens*.

3. Cum duæ quantitates æquantur, inter eas datur ratio *Æqualitatis*, cum ſunt inæquales, ratio eſt *Inæqualitatis*.

4. Si prima contineat ſecundam aliquoties exacte, prima vocatur ſecundæ *Multiplex*, quæ eſt *tripla quadrupla* &c. ſi ter vel quater contineat. quantitas vero quæ continetur vocatur *Submultiplex*.

5. Si prima contineat ſecundam ſemel, atque amplius unam ejus partem aliquotam, fit ratio *Supraparticularis*, quæ fit *Seſquialtera*, ſi pars aliquota ſit dimidia, *Seſquitertia*, ſi ſit pars tertia, *Seſquiquarta*, ſi pars quarta, & ſic in infinitum, Ita ratio 3 : 2 eſt ſeſquialtera, 4 : 3 ſeſquitertia, 5 : 4 ſeſquiquarta.

6. Si prima contineat ſecundam ſemel, & amplius plures aliquotas fit ratio *Superpartiens*, quæ fit *Superbipartiens tertia*; ſi ſuper abundent duæ tertiæ partes, ut 5 : 3, *Supertripartiens quarta*,

*ta*, ſi *ſuperabundent* tres quartæ partes ut 7 : 4.

7. Ex quibus rationibus fiunt compoſitæ, *Multiplex Supraparticularis*, & *Multiplex Suprapartiens*. Sic quia 7 continet ter 2, & amplius ejus dimidiam ratio 7 : 2 eſt tripla ſeſquialtera. Et quia 13 continet 5 bis, & amplius tres quintas, erit dupla ſupertripartiens quintas.

8. Cum autem exponenda eſt aliqua ratio, tum fiat per minimos terminos. Sic cum eadem ſit ratio 100 ad 50, & 20 ad 10, & 16 ad 8, quæ eſt 2 ad 1; nempe dupla; quælibet ratio dupla exponatur per minimos terminos 2, & 1.

9. Duæ rationes Geometricæ æquales conſtituunt *Proportionem Geometricam*. Tum nimirum quatuor termini dicuntur eſſe in proportione Geometrica, cum quoties primus continet, vel continetur in ſecundo, toties tertius contineat, vel contineatur in quarto. Ut 8. 4. 12. 6.

Ex quo fit ut quemadmodum ratio ex duobus terminis conſtat, ita proportio ex quatuor.

10. Si termini conſtituentes proportionem ſunt omnes diverſi, proportio dicitur *Diſcreta*, ut 6 : 3, 4 : 2. Sed ſi unus bis repetatur eſt *Continua*, ut 8 : 4, 4 : 2.

10. Antecedentes rationum dicuntur *Homologhi* inter ſe, & pariter conſequentes.

11. Proportio Geometrica dicitur etiam propter dignitatem *Proportio*.

12. Si duæ quantitates æqualiter contineant alias duas quantitates, vocantur *Æquimultiplices*.

Quælibet proportio Geometrica ita exponatur $a : b = c : d$ Et quoniam primus debet continere, vel contineri a ſecundo, veluti tertius continet, vel continetur in quarto, ſi multiplicetur primus

mus per quantitatem $m$; ut fiat $mb$, poterit loco $a$ ſubſtitui $mb$; & ſic loco $c$ ſubſtitui $md$. Quare termini fient $mb : b = md : d$.

## THEOREMA FUNDAMENTALE.

SI ſint quatuor quantitates Geometrice proportionales erit productum extremarum æquale producto mediarum.

Sit $a : b = c : d$

Dico $ad = bc$

Fiat enim ſubſtitutio, & erunt termini $mb : b = md : d$

Productum extremorum $= mbd$

Productum mediorum $= mbd$

Sit $6 : 3 = 2 : 1$

Productum extremorum $= 6$

Productum mediorum $= 6$

## COROLLARIUM I.

QUare ſi termini ſint in proportione continua, erit productum extremorum æquale quadrato medii.

Sit enim $a : b = b : c$

Erit etiam $ac = bb$

## COROLLARIUM II.

EX qua proprietate exurgit methodus inveniendi quartam proportionalem tribus datis quantitatibus.

Sint

Sint enim datæ $a$, $b$, $c$, & quæſita $x$.

Erit ergo $a : b = c : x$

Quare $ax = bc$

Et fit $x = \frac{bc}{a}$

Nimirum multiplicandæ ſunt duæ mediæ inter ſe, & productum dividendum per primam.

Eodem modo ſi datis duabus quantitatibus inveniri debeat tertia proportionalis, per idem Theorema invenietur.

Sint enim datæ $a$ & $b$; quæſita tertia $x$.

Et erit $a : b = b : x$

Quare $ax = bb$

Et $x = \frac{bb}{a}$

Quadranda ergo ſecunda, & dividendum quadratum per primam.

## COROLLARIUM III.

Quod ſi inter duas datas $a$, $b$ inveniri debeat media proportionalis, fiat $a : x = x : b$ & erit $ab = xx$ Quare ex producto $ab$ extrahenda erit quadrata radix.

## SCHOLION.

Hæc regula vocata eſt *Aurea* ab antiquis propter ingentem ejus uſum in Scientiis ſublimioribus, & in quocunque civili commercio.

THEO-

## *THEOREMA II. FUNDAMENTALE.*

SI ſint quatuor quantitates $a$, $b$, $c$, $d$ ita ut productum extremarum $ad$ ſit æquale producto mediarum $bc$, dico ipſas eſſe Geometrice proportionales.

Quæratur enim quarta proportionalis $x$, erit ergo $a : b = c : x$.

| | |
|---|---|
| Quare | $ax = bc$ |
| Sed ponitur | $ad = bc$ |
| Ergo | $ax = ad$ |

Et dividendo per $a$, $x = d$. Eſt ergo $d$ quarta proportionalis, & conſequenter datæ ſunt in proportione, quod erat demonſtrandum.

## COROLLARIUM.

QUare ſi ſint duo producta æqualia, poterunt eorum factores multis modis in proportione conſtitui.

| | |
|---|---|
| Sit enim | $aabc = ddef$ |
| Ergo | $aa : dd = ef : bc$ |
| Et | $aab : dde = f : c$ |
| Et | $a : d = def : abc$ |

Quod infinitis modis effici poteſt.

## *THEOREMA III.*

SI ſint quatuor proportionales $a : b = c : d$ erit etiam $b : a = d : c$

Fiat enim ſubſtitutio, & erit $mb : b = md : d$
Ergo $b : mb = d : md$

Productum extremorum $b\,m\,d$

Productum mediorum $b\,m\,d$

Sint $6 : 3 = 8 : 4$

Ergo $3 : 6 = 4 : 8$

Hujus argumentandi genus revocatur *Inverſio*.

## THEOREMA IV.

SI ſint $a : b = c : d$

Serit $a : c = b : d$

Nam $mb : md = b : d$

Productum extremorum $= b\,m\,d$

Productum mediorum $= b\,m\,d$

Hujus argumentandi genus vocatur *Alternatio*.

## THEOREMA V.

SI ſint $a : b = c : d$

Erit $\overline{a+b} : b = \overline{c+d} : d$

Facta enim ſubſtitutione erit

$$\overline{mb+b} : b = \overline{md+d} : d$$

Productum extremorum $= bmd+bd$

Productum mediorum $= bmd+bd$

$6 : 3 = 8 : 4$

Ergo $9 : 3 = 12 : 4$

Hujus argumentandi genus vocatur *Compoſitio*.

## THEOREMA VI.

SI ſint $a : b = c : d$

Erit $\overline{a-b} : b = \overline{c-d} : d$

Facta enim ſubſtitutione

$$\overline{ab-b} : b = \overline{md-d} : d$$

Pro-

Productum extremorum $= bmd - bd$
Productum mediorum $= bmd - bd$

$6 : 3 = 8 : 4$

Ergo $3 : 3 = 4 : 4$

Hujus argumentandi genus vocatur *Subtractio*.

## THEOREMA VII.

SI ſint $a : b = c : d$
Et $e : f = g : h$

erunt etiam producta proportionalia nempe
$ae : bf = cg : dh$

Nam per primam proportionem $ad = bc$
& per ſecundam $eh = fg$

Multiplicando ergo æqualia per æqualia
$adeh = bcfg$

Quare per ſecundum Theorema
$ae : bf = cg : dh$

ut erat propoſitum.

$6 : 3 = 4 : 2$
$9 : 4 = 18 : 8$

Ergo $54 : 12 = 72 : 16$

Hujus argumentandi genus vocatur *Multiplicatio*.

## COROLLARIUM.

ERgo ſi ſint quatuor proportionales, erunt quoque proportionales eorum quadrati, & cubi, & quælibet poteſtates. Hæc enim fiunt ex ipſarum productis.

| | |
|---|---|
| Sic ſi ſint | $6 : 3 = 4 : 2$ |
| erit | $36 : 9 = 16 : 4$ |
| Et | $216 : 27 : 64 : 8$ |

## THEOREMA VIII.

SI ſint quatuor proportionales, & dividantur ordine per quatuor alios proportionales, quoti erunt proportionales.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sit enim | *ae* | : | *bf* | = | *eg* | : | *dh* |
| Et | *a* | : | *b* | = | *c* | : | *d* |
| erit | *e* | : | *f* | = | *g* | : | *h* |

Si enim non eſſent proportionales, illos multiplicando per terminos ſecundæ proportionis non facerent producta proportionalia, quod eſt contra hypotheſin.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sint ergo | 54 | : | 12 | = | 72 | : | 16 |
| Et | 9 | : | 4 | = | 18 | : | 8 |
| erit | 6 | : | 3 | = | 4 | : | 2 |

Hujus argumentandi genus vocatur *Diviſio*.

## COROLLARIUM.

SI poteſtates ergo quæcunque ſint proportionales, erunt & proportionales radices ſimiles.

## THEOREMA IX.

ÆQuimultiplices ſunt in eadem ratione ſimplicium.

Sint enim duæ quantitates *a*, & *b* & multiplicentur ambæ per *m*, erit *ma* : *mb* = *a* : *b*

Productum extremarum = *abm*

Productum mediarum = *abm*

Sint duo numeri 6, 3, & multiplicentur ambo per quemcunque numerum, ut 4, erit 24 : 12 = 6 : 3

THEO-

## THEOREMA X.

PArtes ſimiles ſunt in eadem ratione totorum.

Sint quantitates $a$, & $b$ quæ dividantur per $m$.

Erit $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = a : b$.

Productum extremorum $\frac{ab}{m}$

Productum mediorum $\frac{ab}{m}$

Sit 12 & 6; & ſumantur partes tertiæ & erit $4 : 2 = 12 : 6$

## THEOREMA XI.

SIt una ſeries terminorum $a$, $b$, $c$, & alia ſeries totidem $d$, $e$, $f$, & termini in prima ſerie ſint ordinatim ut termini in ſecunda. Dico quod primus ad tertium in prima ſerie, ita primus ad tertium in ſecunda.

Sint enim primi $a$, $ma$, $mna$ erunt ſecundi $d$, $md$, $mnd$

Quare $a : mna = d : mnd$

Eadem demonſtrandi methodus, quotlibet ſint in ſerie.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Sit ſeries prima | 8 | 4 | 1 | 3 |
| Series ſecunda | 16 | 8 | 2 | 6 |

Ergo $8 : 3 = 16 : 6$

Hoc argumenti genus vocatur per *ordinatam Æqualitatem*.

Sit una ſeries terminorum $a$, $b$, $c$ & alia ſeries totidem $d$, $e$, $f$ ſed ratio terminorum in prima ſe-

rie

rie ordine contrario procedat ac ratio in ſecunda ; ut nempe primus ad ſecundum in prima ſerie, ita ſecundus ad tertium in ſecunda, & ut ſecundus ad tertium in prima, ita primus ad ſecundum in ſecunda, erit primus ad tertium in prima, ita primus ad tertium in ſecunda.

Sint enim primi $a$, $ma$, $mna$
Erunt ſecundi, $e$, $ne$, $mne$
Quare $a : mna = e : mne$
Idem valet quotquot ſint in ſerie.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Sit ſeries prima | 2 | 6 | 12 | 4 |
| Secunda | 6 | 2 | 4 | 12 |
| Ergo | 2 : 4 | = | 6 | 12 |

Hoc argumentandi genus dicitur per *Æqualitatem perturbatam*.

## *SCHOLION.*

His Theorematibus continetur quintus Elementorum Euclidis.

### *Applicatio regulæ aureæ ad problemata directa, & inverſa.*

Si ſint duæ quantitates $a$, $b$ & aliæ duæ $c$, $d$. ſitque ut prima illarum ad ſecundam ita prima iſtarum ad ſecundam tum ſit proportio Geometrica *Directa*. At ſi ſit ut prima illarum ad ſecundam ita ſecunda iſtarum ad primam tum proportio dicitut *Invenia*.

Eadem methodo in utroque caſu invenitur quartus proportionalis.

Sed in ſecundo ad majorem facilitatem opus eſt invertere terminos.

Eſt

Eſt enim in primo caſu $x : b = c : x$
At in ſecundo $b : a = c : x$

## PROBLEMA I.

TEmpore 3 impendium fit 2. Quæritur impendium tempore 6?

Quoniam impendium primum eſt ad impendium ſecundum ut tempus primum ad tempus ſecundum, ſi impendium ſecundum dicatur $x$.

Erit $3 : 6 = 2 : x$
Et fit $x = 4$.

## PROBLEMA II.

VI 2 vincitur reſiſtentia 6.
Quæritur reſiſtentia vi 3?

Quoniam vis prima ad vim ſecundam eſt ut reſiſtentia prima ad ſecundam; ſi reſiſtentia quæſita dicatur $x$

Erit $2 : 3 = 6 : x$
Et fit $x = 9$.

## PROBLEMA III.

UT fiat edificium neceſſarii ſunt Artifices 100 tempore 8; Quot artifices requiruntur tempore 16?

Quoniam creſcente tempore imminui debet numerus artificum & e contra decreſcente tempore debet imminui, erit ratio artificum in ratione inverſa temporum.

Quare fiat ut tempus ſecundum ad tempus primum, ita artifices primi ad ſecundos. Si igitur nu-

numerus artificum quæſitus dicatur $x$
Erit $16 : 8 = 100 : x$
Et fit $x = 50$

## PROBLEMA IV.

AD peragrandum datum ſpatium tempore 2 quæritur gradus celeritatis 4. Ad idem peragrandum tempore 8 quæritur gradus celeritatis? Quoniam creſcente tempore requiritur minor celeritas, & decreſcente major, erunt celeritates in ratione inverſa temporum.
Si igitur quæſita celeritas ſit $x$.
Erit $8 : 2 = 4 : x$
Et fit $x = 1$

### *Applicatio regulæ aureæ ad problemata Societatum.*

Si plures ſimul funda diverſa poſuerint ad lucrum faciendum, & poſt dato tempore quærant dividere lucrum, hujuſcemodi Problemata dicuntur *Societatis*.

Ad quæ omnia reſolvenda, obſervandum eſt proportionem fieri debere inter funda ſingulorum, & lucra. Et ut ſe habet totale fundum ad fundum uniuſcujuſque, ita ſe habebit lucrum totale ad lucrum uniuſcujuſque.

Sit igitur primus, cujus fundum fuerit 24, alterius fundum ſit 30, tertii 46. Lucrum vero totale ſit 200.

Et erit pro primo $100 : 24 = 200 : x$
Pro ſecundo $100 : 30 = 200 : z$
Pro tertio $100 : 46 = 200 : y$
Et erunt partes 48. 60. 92

De

# *DE PROPORTIONE HARMONICA; ET CONTRAHARMONICA.*

## CAPUT III.

### *Definitiones.*

1. Quatuor quantitates dicuntur harmonice proportionales, cum differentia inter primam & ſecundam ad differentiam tertiæ & quartæ eſt ut prima ad quartam. Tales ſunt numeri 6. 8. 12. 18.

2. Si omnes termini ſunt diverſi, harmonica proportio eſt *diſcreta*. Si vero ſecundus bis repetitur eſt *continua*. Tales ſunt numeri 15. 5. 3.

3. Si vero differentia primi & ſecundi eſt ad differentiam tertii & quarti ut quartus ad primum, tum proportio eſt *Contraharmonica*. Tales ſunt 3. 11. 2. 6.

## PROBLEMA I.

Datis tribus quantitatibus invenire quartam harmonicam. Sint datæ 6. 8. 12, & harmonica quæſita $x$

Erit ergo $\overline{6 - 8} : \overline{12 - x} = 6 : x$

Quare $6x - 8x = 72 - 6x$

Et $4x = 72$

Et $x = 18$

*Univerſaliter.*

Sint datæ tres quantitates $a$, $b$, $c$, & quarta quæſita $x$

Ergo $\overline{a - b} : \overline{c - x} = a : x$
Quare $a x - b x = a c - a x$
Et fit $x = \frac{a c}{2 a - b}$

## PROBLEMA II.

Datis duabus quantitatibus invenire tertiam continuam proportionalem harmonicam. Sint dati duo numeri 24. 12 & quæſitus $x$

Ergo $\overline{24 - 12} : \overline{12 - x} = 24 : x$
Quare $24 x - 12 x = 288 - 24 x$
Et $36 x = 288$
Unde fit $x = \frac{288}{36}$

*Univerſaliter.*

Sint duæ quantitates $a$, $b$ quæſita $x$

Ergo $\overline{a - b} : \overline{b - x} = a : x$
Ergo $a x - b x = a b - a x$
Et $2 a x - b x = a b$
Ergo $x = \frac{ab}{2 a - b}$

PRO-

## PROBLEMA III.

DAtis duabus quantitatibus 24. 8 invenire mediam harmonicam $x$

Ergo $\overline{24 - x} : \overline{x - 8} = 24 : 8$

Et fit $x = 12$

*Univerſaliter.*

Sint datæ $a$, $b$, quæſita $x$

Ergo $\overline{a - x} : \overline{x - b} = a : b$

Quare $ab - bx = ax - ab$

Et fit $x = \frac{2ab}{a+b}$

## SCHOLION.

UT inveniatur quarta contraharmonica, fit Æquatio duarum dimenſionum, quæ ſuo loco explicabitur.

## DE PROPORTIONIBUS COMPOSITIS.

## CAPUT IV.

*Definitio.*

FIeri poteſt ut quantitas aliqua creſcat, aut decreſcat ſecundum plures rationes. Sic vis motrix debet augeri & propter molem, quæ moveri debet, & propter velocitatem, quæ debet imprimi.

Si unus gradus virium movet molem unius ponderis, ad movendam molem dupli ponderis cum eadem velocitate requiritur dupla vis. Sed ſi velocitas etiam augeri debeat, & ſit tripla, requiretur vix ſextupla.

Si quantitas ſit quadrupla reſpectu unius, & quintupla reſpectu alterius, reſpectu amborum erit vigecupla. Unde fit regula generalis, quod ut determinetur ratio duarum quantitatum inter ſe creſcentium, vel decreſcentium ſecundum plures reſpectus debeant ſumi producta earum quantitatum, ſecundum quas illæ creſcunt, aut decreſcunt.

## COROLLARIUM I.

Quare ſi ſit quantitas $Q$, quæ ex pluribus pendeat quantitatibus A, B, C, &c. & alia quantitas $q$ quæ ex pluribus aliis ſimilibus pendeat $a$, $b$, $c$ &c. erit $Q : q = A\,B\,C : a\,b\,c$ Hæc vocatur *ratio Compoſita*.

## COROLLARIUM II.

Datis ergo rationibus plurium quantitatum inter ſe comparatarum, erit ratio earum compoſita ut productum antecedentium ad productum conſequentium.

Ita ſi ſint $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \frac{g}{b}$

ratio compoſita erit $\frac{a\,c\,e\,g}{b\,d\,f\,b}$

## COROLLARIUM III.

E Contra ſi detur ratio compoſita, rationes omnes quantitatum ex quibus unum productum generatur ad quantitates ex quibus generatur alterum, erunt *Componentes*.

Ut ſi ſit ratio *a b e g* : *b d f h*, Componentes rationes erunt *a* : *b*, *c* : *d*, *e* : *f*, *g* : *h*.

*Definitiones*.

1. Compoſita ex duabus rationibus æqualibus dicitur *Duplicata*. Ut ſint rationes *a* : *b*, & *a* : *b* erit earum compoſita *aa* : *bb* quæ eſt duplicata rationis *a* : *b*.

2. Componens autem duplicatæ dicitur *Sudduplicata*, ut *a* : *b*.

Ex quibus ſequitur duplicatam alicujus rationis eſſe idem ac rationem quam habent inter ſe quadrata terminorum, ſudduplicatam vero eſſe ut radices quadratas.

3. Compoſita ex tribus rationibus æqualibus dicitur *Triplicata*; Ut ſi ſint tres rationes *a*: *b*, *a* : *b*, *a* : *b* erit earum compoſita *aaa* : *bbb* quæ eſt triplicata *a* : *b*. Ex quibus ſequitur triplicatam alicujus rationes eſſe idem ac rationem quam habent inter ſe cubi terminorum. Ratio autem componens triplicatam vocatur ejus *Subtriplicata*.

4. Eodem modo fit ratio quadruplicata, quintuplicata &c. Quare ut ſumatur quadruplicata ratio duarum quantitatum, opus eſt ſumere rationem quadrato-quadratorum, & ut quintuplicata, rationem ſurſolidorum. E contra radices quartæ exprimunt ſubquadruplicatam, rationes quintæ ſubquintuplicatam &c.

THEO-

## THEOREMA.

SInt quælibet quantitates continue proportionales geometricæ, erit prima ad tertiam, ut quadratum primæ ad quadratum ſecundæ, prima ad quartam ut cubus ad cubum, prima ad quintam ut quarta poteſtas ad quartam poteſtatem, & ſic procedendo in infinitum.

Sint enim quantitates $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, ... &c.

Et quoniam ſunt geometrice proportionales erunt $a$, $b$, $\frac{bb}{a}$, $\frac{bbb}{aaa}$, $\frac{bbbb}{aaaa}$, &c.

Quare prima ad tertiam erit ut $a : \frac{bb}{a}$, ſive $aa : bb$

prima ad quartam ut $a : \frac{bbb}{aa}$ ſive ut $aaa : bbb$

prima ad quintam ut $a : \frac{bbbb}{aaaa}$ ſive ut $aaaa : bbbb$

Ex quibus patet propoſitum.

## COROLLARIUM.

ERit prima ad tertiam in ratione duplicata primæ ad ſecundam, prima ad quartam in triplicata prima ad quintam in quadruplicata & ſic procedendo in infinitum.

## *APPLICATIO REGULÆ AUREÆ AD PROBLEMATA COMPOSITA.*

### PROBLEMA I.

UT effodiantur 2 palmi, quorum reſiſtentia 3, requiritur vis 4.

Ut effodiantur palmi 3, quorum reſiſtentia 4, quæ vis requiritur?

Animadverto primo vires eſſe in ratione directa palmorum, & inſuper in ratione directa reſiſtentiarum. Quare erunt in ratione compoſita, & palmorum, & reſiſtentiarum, nempe ut eorum productum.

Palmi 2 Reſiſtentia 3 Productum primum 6
Palmi 3 Reſiſtentia 4 Productum ſecundum 12

Ergo ut productum primum ad productum ſecundum ita vis prima ad vim ſecundam. Quare ſi vis quæſita dicatur $x$

Erit $6 : 12 = 4 : x$
Et fit $x = 8$

### PROBLEMA II.

AD enutriendos 20 homines tempore 2 impendium eſt 100. Ad enutriendos 30 homines tempore 6 quantum erit impendium?

Impendia primo ſunt in ratione directa hominum enutriendorum. Secundo ſunt in ratione directa temporum. Ergo erunt ut eorum producta.

Homines 20 Tempus 2 Productum primum 40
Homines 30 Tempus 6 Productum ſecundum 180

Si

Si ergo impendium quæſitum ſit $x$

Erit $40 : 180 = 100 : x$

Et fit $x = \frac{18000}{40}$

## PROBLEMA III.

Tres perſonæ lucratæ ſunt ſimul 200

| | | | |
|---|---|---|---|
| Prima poſuit | 20 | pro tempore | 3 |
| Secunda. | 40 | pro tempore | 2 |
| Tertia | 24 | pro tempore | 6 |

Quæritur quomodo dividendum ſit lucrum?

Adverto lucra eſſe in ratione fundorum, & in ratione temporum. Quare erunt in ratione compoſita fundorum, & temporum, nempe ut eorum producta. Multiplicandum ergo erit ſingulorum fundum per ſuum tempus, & productum iſtud erit pro ſingulis tanquam fundum compoſitum. Ut habeatur autem fundum totale compoſitum, fiat ſumma horum productorum. Inde fiat ut fundum totale ad totale lucrum, ita fundum uniuſcujuſque ad ſuum lucrum.

Fundum compoſitum primi $= 60$

Fundum ſecundi $= 80$

Fundum tertii $= 144$

Quare fundum totale $= 284$

Fiet ergo pro primo $284 : 60 = 200 : x$

Et pro ſecundo $284 : 80 = 200 : z$

Et pro tertio. $284 : 144 = 200 : y$

### *SCHOLION.*

Ab hoc problemate pendent omnes quæſtiones compoſitæ ſocietatum.

PRO-

## PROBLEMA IV.

AD effodiendos 20 palmos tempore 3 requiruntur Artifices 10.

Ad effodiendos 12. palmos tempore 6 quot artifices?

Quoniam artifices ſunt in ratione directa palmorum, & in ratione temporum, ponatur directe ratio palmorum, ſed inverſe ratio temporum, & erit ratio artificum in ratione horum productorum.

Palmi 20 Tempus 6 Productum 120
Palmi 12 Tempus 3 Productum 36

Si artificum quæſitus numerus dicatur $x$, erit

$$120 : 36 = 10 : x$$

& fit $x = 3$

## *DE ALGORITHMO FRACTIONUM.*

## CAPUT V.

### *Definitiones.*

FRactio proprie dicitur quantitas unitate minor; quæ quia non poteſt exprimi neque per unitatem, neque per numerum integrum exprimitur per rationem ad unitatem.

Si nempe concipiatur unitas in tres partes diviſa, quarum duæ contineantur in data quantitate erit hæc quantitas ad unitatem ut 2 : 3.

Et ſi unitas concipiatur in quatuor partes diviſa, quarum tres ſint in data quantitate, hæc quantitas ad unitatem ſe habebit ut 3 : 4.

Exprimatur ergo fractio per rationem, quam ha-

bet ad unitatem & ſit prima $\frac{2}{3}$, ſecunda $\frac{3}{4}$.

2. Antecedens rationis dicitur *Numerator*. Conſequens dicitur *Denominator*. Ita in prima fractione 2 eſt numerator, 3 denominator, & in ſecunda 3 eſt numerator, 4 denominator. In prima nempe 3 repræſentat partes, quæ in unitate continentur, 2 partes quæ continentur in quantitate minori. Sic in ſecunda 4 repræſentat unitatem in quatuor partes diviſam, quarum tres continentur in quantitate minori.

Ex quibus ſequitur quod ſi duæ quantitates eodem modo ad unitatem ſe habeant, eæ ſint æquales. Sic ſi una quantitas ſit $\frac{2}{3}$, alia $\frac{4}{6}$ quoniam 2 : 3 eodem modo ſe habet ac 4 : 6 hæ duæ quantitates erunt æquales.

3. Interdum exprimitur ipſa unitas more fractionis, ut ſi ſcribatur $\frac{1}{1}$.

Interdum etiam numerus unitate major ut ſi ſit $\frac{5}{4}$. $\frac{6}{5}$

Vocantur autem hæ fractiones *impropriæ*, ſive *ſpuriæ*.

## PROBLEMA I. FUNDAMENTALE.

*Fractiones ad eamdem denominationem reducere.*

1. Sint duæ fractiones $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$ ad eandem denomi-

mi-

minationem reducendæ. Multiplicentur ambo termini conſtituentes primam per denominatorem ſecundæ, ut fiat $\frac{10}{15}$.

Hinc ambo termini ſecundæ per denominatorem primæ ut fiat $\frac{12}{15}$; eruntque ad eandem denominationem reductæ; nec immutabitur eorum valor; cum enim æquimultiplices ſint in eadem ratione ac ſimplices, eædem erunt rationes numeratoris ad denominatorem, ac proinde quantitates non mutabuntur.

2. Si ſint tres, ut $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{7}$ reducantur primo duæ, & ſint $\frac{15}{20}$ $\frac{16}{20}$; quarum ambæ mox reducantur cum tertia, & fiant $\frac{105}{140}$. $\frac{112}{140}$. $\frac{100}{140}$.

3. Sint autem quotcunque, producantur ſinguli denominatores inter ſe, & fiet comunis denominator. Numerator autem ſingularum multiplicatus per denominatores aliarum erit quæſitus numerator.

Quare ſi ſint fractiones

$\frac{a}{b}$. $\frac{c}{d}$. $\frac{e}{f}$. $\frac{m}{n}$. $\frac{o}{s}$, erunt reducendo

$$\frac{adfns\ ;\ bcfns\ ;\ bdens\ ;\ bdfms\ ;\ bdfno}{bdfns}$$

## PROBLEMA II.

*Fractiones addere.*

REducantur primo ad eandem denominationem, hinc numeratores addantur

Sint addendæ $\frac{3}{4}$ & $\frac{3}{5}$

Reductæ fiunt $\frac{15}{20}$ & $\frac{12}{20}$

quarum ſumma eſt $\frac{27}{20}$

Si fractiones ſunt litterales jungantur cum ſigno + ut ſi ſint $\frac{a}{b}$ ; $\frac{c}{d}$

Summa erit $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$.

Sed poſſunt etiam reduci ad eandem denominationem. Sic illæ fient $\frac{ad}{bd}$ ; $\frac{bc}{bd}$ ; quarum ſumma eſt $\frac{ad + bc}{bd}$

## PROBLEMA III.

*Fractiones a fractionibus ſubtrahere.*

REducantur ad eandem denominationem, hinc ſubtrahatur numerator a numeratore.

Sit

Sit fractio $\frac{3}{4}$, ex qua ſubtrahenda ſit $\frac{2}{5}$. Reductæ fiunt $\frac{15}{20}$ $\frac{8}{20}$ Erit ergo earum differentia $\frac{7}{20}$

Si fractiones ſint litterales, exprimatur ſubtractio per ſignum —. Ita ſit fractio $\frac{a}{b}$, ex qua ſit ſubtrahenda $\frac{c}{d}$; ſcribatur $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$.

Sed poſſunt etiam ad eandem denominationem reduci, ut ſubtrahatur numerator a numeratore, veluti in numeris.

## PROBLEMA IV.

*Fractiones multiplicare.*

UT Analytice inveſtigetur methodus; ſit $\frac{a}{b} = P$ & $\frac{c}{d} = Q$

Quoniam vero ex natura fractionis ut denominator ad numeratorem ita eſt unitates ad fractionem erunt hæ duæ proportiones

$b : a = 1 : P$

$d : c = 1 : Q$

Quare multiplicando erit $bd : ac = 1 : PQ$

Ergo $bdPQ = ac$

Et conſequenter $PQ = \frac{ac}{bd}$

Ut habeatur ergo productum quæſitum multiplicentur numeratores, hinc denominatores, & productorum ratio erit quæſitum productum.

Sint

Sint ergo $\frac{3}{4}$ multiplicandi per $\frac{2}{5}$ erit productum $\frac{6}{20}$

Si plures ſint fractiones, multiplicentur ſinguli numeratores & ſinguli denominatores; & fiet fractio, quæ erit quæſitum productum.

Sint ergo $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$ multiplicandæ inter ſe à productum eſt $\frac{30}{84}$

## PROBLEMA V.

*Fractiones dividere.*

Sit $\frac{a}{b}$ dividenda per $\frac{c}{d}$, erit quotus $\frac{a\,d}{b\,c}$, ut eadem methodo cognoſci poterit. Multiplicandus ergo numerator primæ per denominatorem ſecundæ; hinc denominator primæ per numeratorem ſecundæ, & ex eorum productis fiat fractio, quæ erit quotus quæſitus.

Sit ergo $\frac{3}{4}$ dividenda per $\frac{2}{5}$ erit quotus $\frac{15}{8}$

Sit ſecundo $\frac{3}{7}$ dividenda per $\frac{5}{9}$ erit quotus $\frac{27}{28}$

PRO-

## PROBLEMA VI.

*Fractionem datam ad quamcunque poteſtatem evehere.*

Si fractio data $\frac{a}{b}$ multiplicetur per ſe ipſam fiet $\frac{aa}{bb}$, quod erit ejus quadratum, & ſi quadratum multiplicetur per $\frac{a}{b}$, fiet cubus $\frac{aaa}{bbb}$, & ſic procedendo. Unde exurgit methodus generalis, ut elevetur ad poteſtatem datam tam numerator, quam denominator.

Sic ſi elevanda ſit ad quadratum $\frac{3}{4}$, erit $\frac{9}{16}$, & ad cubum $\frac{27}{64}$ & eodem modo ad quamcumque poteſtatem.

## PROBLEMA VII.

*Ex fractione data radicem datam extrahere.*

Velut ad efformandam poteſtatem opus eſt poteſtatem facere & numeratoris, & denominatoris, ita ad extrahendam radicem, extrahenda erit ab utroque numero.

Sit fractio $\frac{aa}{bb}$, erit ejus radix quadrata $\frac{a}{b}$

Sit fractio $\frac{aaa}{bbb}$, erit ejus radix cubica $\frac{a}{b}$

Sic

Sic radix quadrata $\frac{4}{9}$ eſt $\frac{2}{3}$,

Radix cubica $\frac{8}{64}$ eſt $\frac{2}{4}$.

## PROBLEMA VIII.

*Quantitatem datam ad fractionem datæ denominationis reducere.*

SIt quantitas *a*, quæ reduci debeat ad fractionem cujus denominator ſit *m*.

Multiplicetur per *m*, & fiat $\frac{am}{m}$

Sic ſi detur numerus 10 reducendus ad fractionem, cujus denominator 15, fiat $\frac{10,\ 15}{15} = \frac{150}{15}$

## SCHOLION.

HAc methodo reducitur totum in quaslibet partes. Ita ſi 4 pedes reducendi ſunt ad pollices; quoniam pollex eſt pedis pars duodecima, multiplicentur per 12, & erunt $\frac{48}{12}$ nempe 48 pollices.

Tali methodo etiam comparantur inter ſe quantitates heterogeneæ ut pedes, & pollices, tranſmutando pedes in pollices; & ſcuta & libræ tranſmutando ſcuta in libras, & ſic de aliis.

PRO-

## PROBLEMA IX.

*Fractionem ſpuriam ad integrum reducere.*

SIt fractio ſpuria $\frac{30}{10}$, & quoniam denominator ter continetur in numeratore ſi dividatur unus per alium quotus erit 3; quæ erit quæſita quantitas. Ita $\frac{30}{5} = 6$; $\frac{16}{4} = 4$; $\frac{15}{5} = 3$;

## SCHOLION.

HAc methodo reducuntur partes ad totum, ut pollices ad pedes, libræ ad ſcuta.

## PROBLEMA. X.

*Determinare rationem, quam habent fractiones inter ſe.*

SInt exempli gratia $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{5}$ & quæratur earum ratio inter ſe. Reducantur ad eumdem denominatorem, & erunt $\frac{15}{20}$. $\frac{8}{20}$ Quare erunt ut 15 : 8

Ita ſi ſint $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. Reductæ ſunt $\frac{ad}{bd}$ $\frac{bc}{bd}$. Erunt ergo ut $ad : bc$.

## PROBLEMA XI.

*Tranſmutare fractionem ex data denominatione in aliam.*

SIt fractio $\frac{3}{4}$ & traſmutanda ſit in fractionem, cujus denominator ſit 12.

Dicatur $x$ numerator quæſitus. Et quoniam eadem debet eſſe fractio, erit $\frac{3}{4} = \frac{x}{12}$

Quare habetur hæc proportio.

$$4 : 3 = 12 : x$$

Et ſit $x = 9$

$\frac{3}{4}$ ergo eſt eadem fractio ac $\frac{9}{12}$

## *SCHOLION.*

MAgni uſus eſt hoc problema, cum fractiones inuſitatæ per ipſum reducantur ad uſitatas.

Sint enim $\frac{2}{3}$ pedis; & quoniam tertia pars pedis non eſt uſitata menſura, ſed pars duodecima nempe pollex, reducatur ad duodecimas; & erit $\frac{8}{12}$ nempe 8 pollices.

## *LEMMA.*

*Datis duobus numeris invenire maximam eorum menſuram.*

DIvidatur major per minorem, & nulla habita ratione quoti dividatur diviſor per reſiduum, hinc primum reſiduum per ſecundum, ſecundum per tertium, & ſic procedendo uſque dum fiat reſiduum o & ultimum reſiduum erit maxima comunis menſura.

Sint numeri 280. & 130 quorum quæratur maxima comunis menſura.

| | |
|---|---|
| Numerus major | 280. |
| Numerus minor | 130 |
| Reſiduum primum | 20 |
| Reſiduum ſecundum | 10 |
| Reſiduum tertium | 0 |
| Maxima comunis menſura | 10 |

## PROBLEMA XII.

*Fractionem datam ad minimos terminos reducere.*

SIt fractio $\frac{130}{280}$ reducenda ad minimos terminos.

Quæratur maxima comunis menſura numerorum 130. 280 quæ eſt 10. Diviſo ergo utroque per 10 fiet fractio $\frac{13}{28}$, quæ eadem eſt ac data, cum maneat eadem ratio; & ad minimos eſt reducta terminos, ut quærebatur.

Sit fraction $\frac{aabbc}{aabbd}$

Dividatur termini per $aabb$ & fiet $\frac{c}{d}$

Sit $\frac{aa - bb}{a + b}$, dividantur termini per $a + b$, & fiet $\frac{a - b}{1}$

## PROBLEMA XIII.

VEluti fractio eſt pars unitatis ita fractio fractionis eſt pars fractionis.

Sit unitas $\frac{1}{4}$, quæ dividatur in quatuor partes, & erit 1 fractio. At ſi rurſus hæc pars dividatur in alias partes ut duæ, tres, quatuor, quantitas quæ continebit hujuſce partes dicetur *Fractio fractionis*.

Ubi obſervandum, quod ſi quantitas $\frac{1}{4}$ dividatur in duas partes æquales; Quemadmodum tota quantitas eſt quarta pars unitatis, ita ejus dimidium eſt pars octava unitatis, & ejus pars tertia erit pars duodecima unitatis. Quod ſi ſint tres quartæ partes unitatis, quarum ſumatur dimidium, erunt tres octavæ. Et ſi ſint tres quintæ quarum ſumatur tertium, erunt tres quindecimæ. At ſi ſumantur duo tertia, erunt ſex quindecimæ. Ex quibus exurgit methodus reducendi fractiones fractionum ad ſimplices fractiones ut nempe multiplicen-

centur & numeratores, & denominatores inter ſe.

Ita ſi detur quantitas quæ ſit $\frac{2}{3}$ ex $\frac{4}{5}$; erit eadem $\frac{8}{15}$ & ſi detur $\frac{4}{7}$ ex $\frac{3}{4}$, erit eadem $\frac{12}{28}$ ſeu deprimendo $\frac{3}{7}$ & univerſaliter ſi ſit $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ erit quantitas $\frac{ac}{bd}$.

Ut computentur ergo fractiones fractionum reducantur ad ſimplices fractiones.

## *SCHOLION.*

EAdem methodo computabuntur *Fractiones Fractionum Fractionum*, licet raro veniant in uſum; nimirum reducendo eas per multiplicationem ad ſimplices fractiones, & computando, ut explicatum eſt.

## *DE FRACTIONUM DECIMALIUM ALGORITHMO.*

## CAPUT VI.

SI unitas dividatur in decem partes, & una ex iſtis partibus in alias decem; & rurſus una ex iſtis in alias decem, erit prima pars una decima unitatis, altera una centeſima, tertia milleſima, & ſic procedendo fiet hæc Geometrica Series.

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{10000}$$

Hujuſmodi Fractiones *Decimales* dicuntur.

Par-

Partes decimæ vocantur etiam *Primæ*, centeſimæ *Secundæ*, milleſimæ *Tertiæ*, & ſic procedendo; quarum maximus uſus eſt in Artibus.

## PROBLEMA I.

*Numeros ad fractiones Decimales reducere.*

MUltiplicetur numerus per denominatorem datum.

Sit numerus 5 reducendus in primas; & erit $= \frac{5 \cdot 10}{10}$

Si in ſecundas $= \frac{5 \cdot 100}{100}$

Si in tertias $= \frac{5 \cdot 1000}{1000}$

Loco autem ſcribendi cyphras o ut in exemplis allatis, inſtitutum eſt ab Inventore, ( *a* ) ut totidem lineæ ponantur ſupra numeratorem, quot zeri poni deberent.

Item quoniam tres primæ $= \frac{3}{10}$ ſcriptum eſt $\overset{\prime}{3}$, & loco $\frac{4}{100}$ ſcriptum eſt $\overset{\prime\prime}{4}$, ut eſt in figura.

4

( a ) *Auctor fractionum Decimalium communiter ſit Mullerus Regiomontanus Anno* 1464. *Secundum Voſſium. Sed primus qui eas expoſuit, fuit Simon Stevinus* 1685.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 Unitates | = | $\overset{0}{4}$ | 4 Quartæ | = | $\overset{IIII}{4}$ |
| 4 Primæ | = | $\overset{I}{4}$ | 4 Quintæ | = | $\overset{IIIII}{4}$ |
| 4 Secundæ | = | $\overset{II}{4}$ | 4 Sextæ | = | $\overset{IIIIII}{4}$ |
| 4 Tertiæ | = | $\overset{III}{4}$ | 4 Septimæ | = | $\overset{IIIIIII}{4}$ |

Quod quidem magni uſus eſt ad faciendas reductiones.

Sint enim $\overset{0}{3} + \overset{I}{5} + \overset{II}{7}$; & reducentur ad unum terminum ſi fiat $\overset{II}{357}$. Etenim 4 unitates ſunt eædem ac $\overset{II}{400}$, $\overset{I}{5}$ primæ ſunt eædem ac 50 ſecundæ.

Ut ergo reducantur unitates datæ ad primas, addatur o, & apponatur ſupra numerum una linea.

Ut reducentur in ſecundas, addantur duo zeri, & apponantur duæ lineæ

Ita 3 unitates reductæ ad primas = $\overset{I}{30}$

3 reductæ ad ſecundas = $\overset{II}{300}$

reductæ ad tertias = $\overset{III}{3000}$

Ut reducantur ſecundæ ad tertias idem fiat

$\overset{II}{3}$ ad tertias = $\overset{III}{30}$

$\overset{II}{4}$ ad tertias = $\overset{III}{400}$

Ut reducantur ad quartas zeri, & lineæ convenientes ponantur.

3 unitates ad quartas = $3000^{''''}$

3 ad quartas = $3000^{'''}$

## PROBLEMA II.

*Fractiones Decimales addere.*

REducantur ad eandem denominationem inde numeri addantur.

Sint $3^{\circ} \,.\, 4^{'} \,.\, 2^{''}$ addendæ $4^{\circ} \,.\, 2^{'}$

Reductæ ſunt

$342^{''}$

$420^{''}$

Summa $762^{''}$

Fractiones addendæ

$5^{\circ}\ 7^{'}\ 4^{'''}$

$6^{\circ}\ 7^{'}\ 4^{''}$

Reductæ ſunt $5074^{'''}$

$6740^{'''}$

Summa $12444^{'''}$

PRO-

## PROBLEMA III.

*Fractiones decimales ſubtrahere.*

REducantur ad eandem denominationem & fiat numerorum ſubtractio.

Sit fractio $6789^{'''}$ ex qua ſubtrahenda ſit fractio $49^{''}$

Reductæ ſunt $6789^{'''}$

$490^{'''}$

Differentia $6299^{'''}$

---

Fractio data $6^{0} . 3^{'} . 4^{'''}$

Subtrahenda $3^{'} \; 2^{''}$

Reductæ $6304^{'''}$

$320^{'''}$

Differentia $5984^{'''}$

## PROBLEMA IV.

*Fractiones decimales multiplicare.*

SInt $\frac{3}{10}$ multiplicandi per $\frac{2}{100}$. Si multiplicatio fiat ordinaria methodo erit productum $\frac{6}{1000}$

M Sic

Sic ſi $\frac{4}{100}$ debeant multiplicari per $\frac{6}{1000}$ erit productum $\frac{24}{100000}$ ex quibus ſequitur multiplicandos eſſe numeratores, & cyphras denominatorum addendas. Eadem methodus in multiplicandis Decimalibus niſi quod loco addendi cyphras addendæ ſunt lineæ exponentes.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Productores | $\overset{''}{4}$ | $\overset{'}{6}$ | $\overset{'}{24}$ |
| Productores | $\overset{'''}{4}$ | $\overset{''}{3}$ | $\overset{''}{3}$ |
| Producta | $\overset{''''}{16}$ | $\overset{'''}{18}$ | $\overset{'''}{72}$ |

## PROBLEMA V.

*Fractiones Decimales dividere.*

QUoniam diviſio contraria eſt multiplicationi, dividantur numeri, & ſubtrahantur lineæ diviſoris a lineis dividendi.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dividendi | $\overset{''''}{8}$ | $\overset{''''}{16}$ | $\overset{''}{34}$ |
| Diviſores | $\overset{'}{2}$ | $\overset{'''}{4}$ | $\overset{0}{2}$ |
| Quoti | $\overset{'''}{4}$ | $\overset{''}{4}$ | $\overset{''}{17}$ |

PRO-

## PROBLEMA IV.

*Fractionem decimalem ad aliam fractionem reducere.*

SInt $\overset{i}{6}$, $\overset{ii}{7}$, $\overset{iii}{8}$, quorum unitas eſt pes, reducendi ad pollices.

Reducti ſunt $\overset{iii}{678} = \frac{678}{1000}$

Erit ergo $\frac{678}{1000} = \frac{x}{12}$.

Et fit $x = \frac{8136}{1000}$; nempe 8 pollices $+ \frac{136}{1000}$

## *SCHOLION.*

CUm autem methodus ſcribendi hujuſmodi lineas viſa ſit quibuſdam incommoda, aliam ſubſtituere methodum, quæ nunc comuniter accepta eſt; ut quot lineæ apponendæ eſſent, in tot gradus ad dexteram conſtituerent fractionem datam, ponendo cyphras intermedias inter unitates, & fractionem, ut exemplis declarabitur.

Sic ſi datæ ſint 4 unitates, & *6* primæ ſcribatur 4. *6*. Punctum autem appoſitum determinat ſitum unitatum. Et quoniam *6* unam figuram continet, denominator quoque unum zerum habebit; & erit $\frac{1}{10}$.

Si ſint unitates nullæ, & *6* primæ; ſcribatur 0. *6*.

Si ſint 3 unitates, & 4 tertiæ, ſcribatur 3.004;

Et quoniam numerus fractionarius o o 4 tres figuras continet, denominator quoque tres zeros habebit. Methodus autem in eo poſita eſt, ut quot lineæ apponendæ eſſent, per tot figuras exprimatur fractio data, quod fit addendo totidem zeros ad partem dexteram, quibus valor non immutatur; & diſtinguendo per punctum intermedium quantitatem fractionarium ab unitatibus.

Sic ſi dentur unitates 4, & *6* primæ, ſcribatur 4 . *6* . & quoniam in quantitate fractionaria unus eſt numerus intelligetur in denominatore eſſe pariter unum zero; Nempe denominatorem eſſe $\frac{1}{10}$

Si ſint 3 unitates, & 4 tertiæ ſcribatur 3 . 004, & quoniam tres figuræ ſunt in quantitate fractionaria, intelligitur eſſe partem tertiam.

Sint nunc addendæ 4 primæ & 5 ſecundæ.

4 primæ = . 4
5 ſecundæ = 05

Reducantur primæ ad ſecundas & erunt . 40
Quare ſumma earum eſt . 45, ſeu 45 ſecundæ.
Eadem methodo fiat ſubtractio.

Ut multiplicentur hujuſmodi fractiones, multiplicentur numeri, quibus exponuntur; & addantur zeri appoſiti. Sit . 04 multiplicanda per . 005 erit productum . 00020 nempe $\frac{20}{100000}$

Si . 003 ſit multiplicanda per . 0005, erit productum . 000005; nempe $\frac{15}{10000000}$

Propter rationem contrarii ſi debeat fieri diviſio, dividantur numeri, & ſubtrahantur cyphræ.

Sic

Sic . 008 diviſa per . 02 dat quotum . 04 ; nempe $\frac{4}{100}$

Si numerus integer multiplicandus ſit per fractionem decimalem, multiplicentur numeri, & addantur tot cypræ producto ad dexteram, ut productum totidem figuris conſtet, quot data fractio.

Sit exempli gratia 4 multiplicandus per 008 ; erit productum . 032.

Si 16 multiplicetur per 0003 erit productum 0048

E contra ſi integer dividendus ſit per fractionem decimalem, dividantur numeri & augeatur quotus ad ſiniſtram tot cyphris ut tot figuras contineat, quot fractio.

## *DE ALGORITHMO POTESTATUM COGNATARUM.*

## CAPUT VII.

*Poteſtates Cognatas* vocamus eas, quæ ex comuni radice generantur, quale ſunt omnes poteſtates, quarum radix comunis eſt *a*.

Si ex quantitate *a* fiant poteſtates id obſervandum venit toties litteram contineri in poteſtate, quot ſunt poteſtatis gradus, ut fit in figura.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Poteſtas nulla | 1 | Tertia | *aaa* |
| Poteſtas prima | *a* | Quarta | *aaaa* |
| Secunda | *aa* | Quinta | *aaaa* |

Ex qua obſervatione orta eſt methodus abbreviandi expreſſionem ponendo ſuper litteram *a* numerum, qui reſpondet gradui poteſtatis.

Sic

| | | |
|---|---|---|
| Sic poteſtas nulla $= a^0$ | | Tertia $= a^3$ |
| Poteſtas prima $= a^1$ | | Quarta $= a^4$ |
| Poteſtas ſecunda $= a^2$ | | Quinta $= a^5$ |

Numerus appoſitus vocatur *Index*, aut *Exponens* aut *Logarithmus*.

## PROBLEMA I.

*Addere cognatas Poteſtates.*

JUngantur ſigno $+$

Sint ſummandæ $a^4$, $a^2$

Erit ſumma $a^4 + a^4$

## PROBLEMA II.

*Subtrahere.*

MUtetur ſignum ſubtrahendæ, & ſimul jungantur.

Sit ex $a^5$ ſubtrahenda $a^3$

Erit differentia $a^5 - a^3$

PRO-

## PROBLEMA III.

### *Multiplicare.*

ADdantur exponentes, ut in figura.

| | |
|---|---|
| $a^3$ multiplicata per $a^5 = a^8$ | $a^3$ per $a^8 = a^{11}$ |
| $a^6$ per $a^3 = a^9$ | $a^2 b^4$ per $a^3 b^5 = a^5 b^9$ |
| $a^n$ per $a^m = a^{m+n}$ | $a^3 c$ per $a^3 c^7 = a^6 c^8$ |

## PROBLEMA IV.

### *Dividere.*

SUbtrahatur index diviſoris ab indice dividendi.

| | |
|---|---|
| $a^5$ diviſa per $a^2 = a^3$ | $a^4$ per $a^5 = a^{-1}$ |
| $a^6$ per $a^4 = a^2$ | $a^4$ per $a^4 = a^0$ |
| $a^n$ per $a^m = a^{n-m}$ | $a^6$ per $a^9 = a^{-3}$ |

## *S C H O L I O N.*

CUm exponens eſt negativus, tum quantitas eſt fractio, cujus numerator eſt 1, & denominator potentia determinata ab exponente.

$-1$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a^{-1}$ | $=$ | $\frac{1}{a}$ | $a^{-5}$ | $=$ | $\frac{1}{a^5}$ |
| $a^{-2}$ | $=$ | $\frac{1}{aa}$ | $a^{-7}$ | $=$ | $\frac{1}{a^7}$ |
| $a^{-3}$ | $=$ | $\frac{1}{a^3}$ | $a^{-n}$ | $=$ | $\frac{1}{a^n}$ |

## PROBLEMA V.

*Exaltare poteſtatem ad poteſtatem.*

Multiplicetur exponens poteſtatis datæ per exponens poteſtatis, cui debet elevari.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Poteſtas tertia | $a^2 = a^6$ | Secunda | $abb = aab^4$ |
| Quarta | $a^2 = a^8$ | tertia | $abb = a^3b^6$ |
| Quinta | $a^3 = a^{15}$ | Quarta | $a^{-2} = a^{-8}$ |
| Septima | $a^0 = a^0$ | Poteſtas $n$, | $a^m = a^{mn}$ |

## PROBLEMA VI.

*Extrahere radices.*

Dividatur exponens datæ poteſtatis per exponentem radicis, quæ debet extrahi.

| | |
|---|---|
| $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$ | $\sqrt[5]{a^{-10}} = a^{\frac{-10}{5}} = a^{-2}$ |
| $\sqrt[4]{a^8} = a^{\frac{8}{4}} = a^2$ | $\sqrt[7]{a^8} = a^{\frac{8}{7}}$ |
| $\sqrt[3]{a^4} = a^{\frac{4}{3}}$ | $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ |
| $\sqrt[5]{a} = a^{\frac{1}{5}}$ | |

Si poteſtates datæ ſunt binomiæ, trinomiæ &c. eadem eſt methodus.

Poteſtas quarta $\overline{a+x}^{3\,4} = \overline{a+x}^{12}$

Poteſtas quinta $\overline{aa+zz}^{2\,5} = \overline{aa+zz}^{10}$

$$\sqrt[3]{\overline{a+x}^{4}} = \overline{a+x}^{\frac{4}{3}}$$

Quæ ſunt magni momenti in calculis ſublimioribus.

## *DE ALGORITHMO RADICUM.*

## CAPUT VIII.

Ex quantitatibus Radicalibus aliæ ſunt *Simplices*, aliæ *Compoſitæ*.

Simplices dicuntur, quæ uno termino conſtant, ut $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{ab}$. Compoſitæ vero, quæ ex plu-

ribus , ut $2 + \sqrt{3}$ , $a + \sqrt{b}$ , $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ; Quarum quidem aliquæ dicuntur *Univerſales* , cum ad radicale compoſitum extenduntur. Ut $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

## THEOREMA I.

SI quadratum $aa$ multiplicatur per aliud quadratum $bb$, exurgit quadratum $aabb$, cujus radix eſt $ab$. Radix ergo quadrata producti eſt ipſum productum radicum.

$4 . 9 = 36$, cujus radix $= 2 . 3 = 6$
$9 . 16 = 144$, cujus radix $= 3 . 4 = 12$.

## THEOREMA II.

SI cubus $a^3$ multiplicetur per cubum $b^3$ , fit cubus $a^3 b^3$ , cujus radix cubica eſt $a b$ , nempe productum radicum, quam habent componentes.

$8 . 27 = 216$ , cujus radix cubica $= 2 . 3 = 6$
$8 . 64 = 512$ , cujus radix cubica $= 2 . 4 = 6$

## THEOREMA III.

SI quarta poteſtas $a^4$ multiplicetur per quartam poteſtatem $b^4$ , fit quarta poteſtas $a^4 b^4$ cujus radix quarta eſt $a b$ , nempe productum radicum , quas habent componentes.

$16 . 81 = 1296$, cujus radix quarta $= 2 . 3 = 6$

## COROLLARIUM.

EAdem eſto de quibuſcumque Poteſtatibus.

## PROBLEMA I.

RAdices ad ſimpliciorem formam reducere.

Sit $\sqrt{18}$. Concipiatur 18 tanquam productum ex duobus quadratis 9 . 2 quorum primus eſt perfectus, alter imperfectus. Ergo per Theorema primum $\sqrt{18}$ erit eadem ac productum radicum hujuſmodi quadratorum. Quare $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{48}$ | $=$ | $4\sqrt{3}$ | $\sqrt{aab}$ | $=$ | $a\sqrt{b}$ |
| $\sqrt{27}$ | $=$ | $3\sqrt{3}$ | $\sqrt{8aac}$ | $=$ | $2a\sqrt{2c}$ |
| $\sqrt{8}$ | $=$ | $2\sqrt{2}$ | $\sqrt{12aab}$ | $=$ | $2a\sqrt{3b}$ |
| $\sqrt{48\,a^3\,b^3}$ | $=$ | $4ab\sqrt{3ab}$ | $\sqrt{9a^3\,b}$ | $=$ | $2a\sqrt{3b}$ |
| $\sqrt{12\,a^4\,bb}$ | $=$ | $2aab\sqrt{3}$ | $\sqrt{32aabb}$ | $=$ | $4ab\sqrt{2}$ |

Si ſunt radices cubicæ, eadem eſt methodus propter ſecundum Theorema.

| | | |
|---|---|---|
| $\sqrt[3]{16}$ | $=$ | $2\sqrt[3]{2}$ |
| $\sqrt[3]{54}$ | $=$ | $3\sqrt[3]{2}$ |
| $\sqrt[3]{32}$ | $=$ | $2\sqrt[3]{4}$ |

$$\sqrt[3]{a^3b} = a\sqrt[3]{b}$$

$$\sqrt[3]{a^3b^3c} = ab\sqrt[3]{c}$$

$$\sqrt[3]{a^4b^4} = ab\sqrt[3]{ab}$$

$$\sqrt[3]{128a^3b} = 4a\sqrt[3]{2b}$$

$$\sqrt[3]{16a^3b^3cc} = 2ab\sqrt[3]{2cc}$$

$$\sqrt[3]{64b^5c^4} = 4bc\sqrt[3]{bbc}$$

Eadem erit methodus pro radicibus quartis, quintis in infinitum.

## COROLLARIUM I.

PEr hanc methodum ergo comparari poterunt radices inter ſe, & determinari eorum ratio.

Ita quia $\sqrt{48}$, & $\sqrt{27}$ ſunt eædem ac $4\sqrt{3}$, & $3\sqrt{3}$; erunt inter ſe ut $4:3$.

Tunque dicuntur *Communicantes*.

## COROLLARIUM II

VEluti autem $\sqrt{48}$ fit $4\sqrt{3}$; extrahendo radicem quadratum 4 ex uno & productoribus nempe 16, quæ extra ſignum $\sqrt{\ }$ ponitur; ita ſi ſit $4\sqrt{3}$, reſtituetur ad primam formam, ſi quadretur 4; & ejus quadratum multiplicetur per 3, ut fiat $\sqrt{48}$.

## SCHOLION.

QUod ſi nullus factor ſit quadratus, tam quantitas erit irreducibilis.

## PROBLEMA II.

*Radices diverſæ ſpeciei ad eandem ſpeciem reducero.*

Sit $\sqrt[2]{2}$, & $\sqrt[3]{9}$ reducendæ ad eandem ſpeciem.

Exprimantur per exponentes, & exponentes ad eandem determinationem reducantur ut in figura.

$$\sqrt[3]{2}\,,\ \&\ \sqrt[2]{9} = 2^{\frac{1}{3}}\ \&\ 9^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{6}}\ \&\ 9^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{4}\ \&\ \sqrt[6]{729}$$

$$\sqrt[3]{3}\,,\ \&\ \sqrt[4]{5} = 3^{\frac{1}{3}}\ ;\ 5^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{4}{12}}\ ;\ 5^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{81}\ ;\ \sqrt[12]{125}$$

$$\sqrt[3]{a}\,,\ \&\ \sqrt[2]{b} = a^{\frac{1}{3}}\ ;\ b^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{6}}\ ;\ b^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{aa}\ ;\ \sqrt[6]{bbb}$$

## PROBLEMA III.

*Addere radices.*

Reducantur ſi fieri poteſt ad ſimplicem expreſſionem ; & ſi ſunt comunicantes addantur numeri extra ſignum $\sqrt{\ }$ ; ſecus jungantur ſuis ſignis.

| | | |
|---|---|---|
| Radices | $\sqrt{48}$ | $= 4\sqrt{3}$ |
| Addendæ | $\sqrt{27}$ | $= 3\sqrt{3}$ |
| Summa | | $7\sqrt{3} = \sqrt{147}$ |
| Radices | $\sqrt{aab}$ | $= a\sqrt{b}$ |
| Addendæ | $\sqrt{9aab}$ | $3a\sqrt{b}$ |
| Summa | | $4a\sqrt{b} = \sqrt{16aab}$ |
| Radices | $\sqrt[3]{16}$ | $= 2\sqrt[3]{2}$ |
| Addendæ | $\sqrt[3]{54}$ | $= 3\sqrt{2}$ |
| Summa | | $5\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{250}$ |

PRO-

## PROBLEMA IV.

*Subtrahere radices.*

REducantur ſi fieri poteſt ad ſimplicem expreſſionem ; & ſi ſunt comunicantes fiat ſubtractio numerorum extra ſignum ; ſecus conjungantur mutato ſigno in ea, quæ ſubtrahitur.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\sqrt{48}$ | = | $4\sqrt{3}$ |
| Subtrahenda | $\sqrt{27}$ | = | $3\sqrt{3}$ |
| Differentia | | | $\sqrt{3}$ |

$$\sqrt[3]{16a^3b} = 2a\sqrt[3]{2b}$$

$$\sqrt[3]{16b^4} = 2b\sqrt[3]{2b}$$

Differentia $\overline{2a - 2b}\,\sqrt[3]{2b}$

## PROBLEMA V.

*Multiplicare radices.*

SI ſunt ejuſdem ſpeciei, multiplicentur poteſtates, & radix hujus producti erit ex demoſtratis productum quæſitum.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\sqrt{5}$ | $\sqrt[3]{4}$ | $\sqrt[3]{6}$ | $\sqrt[4]{ab}$ | $\sqrt[4]{aa}$ |
| | $\sqrt{6}$ | $\sqrt[3]{3}$ | $\sqrt[3]{-2}$ | $\sqrt[4]{ac}$ | $\sqrt[4]{aa}$ |
| Producta | $\sqrt{30}$ | $\sqrt[3]{12}$ | $\sqrt[3]{-12}$ | $\sqrt[4]{aabc}$ | $\sqrt[4]{aaaa} = a$ |

Si ſunt diverſæ ſpeciei, reducantur ad eandem.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\sqrt{3} = \sqrt[6]{27}$ | $-\sqrt[3]{3} = -\sqrt[6]{9}$ | $\sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{16}$ |
| | $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9}$ | $\sqrt{2} = \sqrt[6]{8}$ | $\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{27}$ |
| Producta | $\sqrt[6]{243}$ | $-\sqrt[6]{72}$ | $\sqrt[12]{432}$ |

## CAPUT VI.

### *Radices dividere.*

SI ſunt ejuſdem ſpeciei, dividantur poteſtates, & quoto apponatur idem exponens.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Dividendæ | $\sqrt{9}$ | $-\sqrt[3]{6}$ | $-\sqrt{aab}$ | $\sqrt{16aac}$ |
| Dividentes | $\sqrt{3}$ | $-\sqrt[3]{2}$ | $\sqrt{ba}$ | $-\sqrt{4ac}$ |
| Quoti | $\sqrt{3}$ | $+\sqrt[3]{3}$ | $-\sqrt{a}$ | $-\sqrt{4a}$ |

SCO-

## *SCHOLION I.*

EAdem eſt methodus pro multiplicandis, & dividendis imaginariis, ubi notandus error viri clariſſimi Ozanam in Algebræ libro primo putantis imaginarium per imaginarium ſemper imaginarium producere.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Multiplicare | $\sqrt{-3}$<br>$\sqrt{-2}$ | $-\sqrt{-3}$<br>$\sqrt{2}$ | $\sqrt{-4}$<br>$\sqrt{-9}$ | $\sqrt{-5}$<br>$-\sqrt{4}$ |
| Producta | $\sqrt{6}$ | $-\sqrt{-6}$ | $6$ | $-\sqrt{-20}$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Dividere | $\sqrt{-4}$<br>$\sqrt{-2}$ | $-\sqrt{3}$<br>$\sqrt{-1}$ | $\sqrt{8}$<br>$-\sqrt{-2}$ | $-\sqrt{-20}$<br>$-\sqrt{-4}$ |
| Quoti | $\sqrt{2}$ | $-\sqrt{-3}$ | $-\sqrt{-4}$ | $\sqrt{5}$ |

## *SCHOLION II.*

HIs probe intellectis facile eſt extendere methodum ad radices Compoſitas, & ad Univerſales, licet in ipſis interdum adhibeantur aliæ particulares methodi, quæ cum ex Æquationibus altis pudeant, non erit hujus loci eas exponere.

## *APPLICATIO ANALYSIS AD PROBLEMATA SIMPLICIA.*

## CAPUT IX.

PRoblemata Arithmetica ad duas reducuntur ſpecies. Alia *determinata* vocantur, alia *indeterminata*

*minata*. Prima ſunt ea, quorum tot ſunt conditiones, quot quantitates quæſitæ, ſecunda quorum conditiones in minori numero ſunt, quam quantitates quæſitæ.

Proclus quidem Euclidis Commentator, & Joannes Pellius diſtinguunt etiam *pluſquam determinata*, quorum plures ſunt conditiones, quam quantitates quæſitæ. Sed hæc ad primam ſpeciem reduci poſſunt.

Cum problema eſt determinatum, tum neceſſe eſt tot æquationes fieri, quot ſunt quæſitæ quantitates. Sic enim ſingulis exterminatis ad unam quæ quæritur fit reductio qua determinata cæteræ etiam determinantur.

Sed cum problema indeterminatum eſt, neceſſe eſt ut plures incognitæ remaneant, quibus arbitrario determinatis reducitur Problema ad determinatum, ut exemplis fiet manifeſtum.

## PROBLEMA I.

Dividere 60 in duas partes, quarum major ſit minoris quintupla.

Pars major $= 5x$
Pars minor $= x$

Erit ergo ex conditione Problematis

$$5x + x = 60$$

Ergo $6x = 60$
Et fit $x = 10$

Partes ergo quæſitæ ſunt 50 . 10

Uni-

*Univerſaliter*:

Dividere $a$ in duas partes, ut prima ad ſecundam ſit in ratione $m : 1$

Pars prima $mx$

ſecunda $x$

Ergo $mx + x = a$

Ergo $x = \frac{a}{m+1}$

## PROBLEMA II.

Dividere 60 in duas partes, ut quadrans primæ cum ſemiſſe ſecundæ componant 20.

Pars prima $x$

ſecunda $y$

Propter primam conditionem $x + y = 60$ A

Propter ſecundam $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 20$ B

Sublatis fractionibus ſecunda Æquatio

Fit $2x + 4y = 160$ B

Quare $2x = 20 - 4y$

Et $x = 80 - 2y$

Subſtituendo in prima

Fit $80 - 2y + y = 60$ A

Et erit $y = 20$

Invento autem valore $y$, ſi loco ejus in prima æquatione ſubſtituatur 20, fiat $x = 40$

Partes ergo quæſitæ ſunt 40 . 20

*Univerſaliter.*

Dividere $a$ in duas partes, quarum prima diviſa per $m$ cum ſecunda diviſa per $n$ conficiant quantitas $b$.

Pars prima $= x$
Secunda $= x$
Ergo $x + y = a$ — A
Et $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = b$ — B

Sublatis fractionibus in ſecunda
Erit $nx + my = mnb$ — B
Quare $nx = mnb - my$.
Si multiplicentur termini primæ per $n$
Fit $nx + ny = an$ — A
Et $nx = an - ny$
Ergo $an - ny = mnb - my$
Et $my - ny = mab - an$
Et $y = \frac{mnb - an}{m - n}$

## PROBLEMA III.

ÆTas Petri tripla eſt ætatis Pauli. Ætas Antonii eſt ſextupla. Summa ætatum eſt 150. Quæruntur ſingulorum ætates.

Ætas Pauli $= x$ Petri $3x$ Antonii $6x$
Ergo $10x = 150$
Et $x = 15$
Ætas Pauli 15, Petri 45. Antonii 90.

Uni-

*Univerſaliter.*

Ætas Petri ad ætatem Pauli eſt ut $m : 1$ Ætas Antonii ut $n : 1$. Summa ſingularum eſt $b$; Quæruntur ætates. Ætas Pauli $x$, Petri $mx$; Antonii $nx$

Ergo $x + mx + nx = b$

Et fit $x = \frac{b}{1 + m + n}$

## PROBLEMA IV.

INvenire duos numeros, quorum primus ſit triplus ſecundi, at ſi a primo ſubtrahatur 30, & a ſecundo 16, reſidua fiunt æqualia

Numerus primus $= 3x$

Secundus $= x$

Ergo $3x - 30 = x - 16$

Et fit $x = 7$

Numeri ergo ſunt $21 . 7$

*Univerſaliter.*

Invenire duas quantitates, quarum prima ad ſecundam ſit ut $m : 1$ ſubtracta vero quantitate $a$ ex prima, & quantitate $b$ ex ſecunda reſidua ſunt æqualia

Quantitas prima $: mx$

Secunda $= x$

Ergo $mx - a = x - b$

Quare $mx - x = a - b$

Et fit $x = \frac{a - b}{m - 1}$

PRO-

## PROBLEMA V.

INvenire duos numeros, quarum primus ſit ſecundi quintuplus, ſed addendo 4 primo, & 6 ſecundo, ſummæ ſunt ut 4 : 1

Numerus primus $5x$
Secundus $x$
Ergo $5x + 4 : x + 6 = 4 : 1$
Quare $5x + 4 = 4x + 24$
Et fit $x = 20$
Numeri ergo ſunt 100. 20

*Univerſaliter.*

Invenire duas quantitates, quorum prima ſit ad ſecundam ut $m : 1$ ſed ad primam addendo $a$, & ad ſecundam $b$, ſummæ ſint ut $n : 1$

Quantitas prima $mx$
Secunda $x$
Ergo $mx + a : x + b = n : 1$
Quare $mx + a = nx + bn$
Et $mx - nx = bn - a$
Ergo $x = \frac{bn - a}{m - n}$

## PROBLEMA VI.

INvenire numerum, ex quo ſubtracto 20, inde 100; reſidua ſint ut 3 : 1

Numerus quæſitus $x$
Ergo $x - 20 : x - 100 = 3 : 1$
Ergo $x - 20 = 3x - 300$
Et fit $x = 140$

Uni-

*Universaliter.*

Invenire quantitatem, ex qua ſubtrahendo $a$, inde $b$; reſidua ſint ut $m : 1$

Quantitas quæſita $x$

Ergo $x - a : x - b = m : 1$

Ergo $x - a = m x - m b$

Et $m b - a = m x - x$

Ergo $\frac{m b - a}{m - 1} = x$

## PROBLEMA VII.

INvenire duos numeros, ut ſi unitas addatur primo, & tollatur a ſecundo quantitas prima ſit dupla ſecundæ, at ſi unitas tollatur a primo, & addatur ſecundo, fiant quantitates æquales

Numerus primus $x$

Secundus $y$

Quare per primam conditionem

$x + 1 : y - 1 = 2 : 1$

Et fit $x + y = 2 y - 2$ A

Per ſecundam $x - 1 = y + 1$ B

In prima æquatione $x = 2 y - 3$

Subſtituendo ergo in ſecunda $2 y - 4 = y + 1$

Et fit $y = 5$

Numeri ergo ſunt 8 . 5

*Universaliter.*

Invenire duas quantitates, ut primæ addendo $a$, & ſubtrahendo a ſecunda; fiant quantitates ut

$m : 1$ Sed a prima tollendo $a$, & addendo ſecundæ, fiunt æquales

Quantitas prima $x$, ſecunda $y$

Per primam conditionem $x + a : y - a = m : 1$

Et fit Æquatio $x + a = my - am$ A

Per ſecundam conditionem $x - a = y + a$ B

In Æquatione A $x = my - an - a$

Subſtituendo in ſecunda $my - an - 2a = y + a$

Et fit $y = \frac{an + 3a}{m - 1}$

## PROBLEMA VIII.

INvenire numerum, cujus ſemiſſis cum trientæ & quadrante conficiant 12.

Numerus quæſitus $x$

Ergo $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 12$

Et ſublatis fractionibus $26x = 288$

Quare $x = \frac{288}{26} = 11 + \frac{1}{13}$

*Univerſaliter.*

Invenire quantitatem, quæ diviſa per $m$, $n$, $p$ conficiat $q$.

Quantitas quæſita $x$

Ergo $\frac{x}{m} + \frac{x}{n} + \frac{x}{p} = q$

Ft tollendo fractiones

$$npx + mpx + mnx = mnpq$$

Et

Et ſit $x = \dfrac{mnpq}{np + mp + mn}$

## PROBLEMA IX.

Dividere 42 in tres partes continue proportionales Geometricas, quarum ratio ſit ut 1 : 4.

Pars prima $x$, ſecunda $4x$, tertia $16x$

Ergo $21x = 42$

Et ſit $x = 2$

Partes ergo ſunt 2 . 8 . 32

*Univerſaliter.*

Dividere $a$ in tres partes continue proportionales Geometricas, quarum ratio ſit ut $1 : n$

Pars prima $x$, ſecunda $nx$, tertia $nnx$

Ergo $x + nx + nnx = a$

Et ſit $x = \dfrac{a}{1 + n + nn}$

## PROBLEMA X.

Invenire duos numeros quorum differentia eſt 24, & ſumma 46.

Numerus primus $x$, ſecundus $y$.

Per primam conditionem $x - y = 24$ A

Per ſecundam $x + y = 46$ B

In Æquatione A $x = 24 + y$

Subſtituendo in B $24 + 2y = 46$

Et ſit $y = 11$; quo invento ſit $x = 35$

*Univerſaliter.*

Invenire duas quantitates, quarum differentia eſt $a$, & ſumma $b$.

Quantitas prima $x$, ſecunda $y$

Per primam conditionem $x - y = a$ A

Per ſecundam $x + y = b$ B

In æquatione A $x = a + y$

Subſtituendo in B $a + 2y = b$

Et fit $y = \frac{b - a}{2}$

## PROBLEMA XI.

INvenire tres numeros, quorum primus cum tertio conficiant 22; primus cum ſecundo 18, ſecundus cum tertio 24.

Numeri quæſiti $x . y . z$

Per primam conditionem $x + z = 22$ A

Per ſecundam $x + y = 18$ B

Per tertiam $y + z = 24$ C

In Æquatione A $x = 22 - z$

Subſtituendo in B $22 - z + y = 18$

Quare $z = y + 4$

Subſtituendo in C $5y + 4 = 24$

Et fit $y = 4$

Quare $x = 14$; & $z = 8$

*Univerſaliter.*

Invenire tres quantitates quarum binæ binæ conficiant quantitates datas.

Sint

Sint quæſitæ $x . y . z$

Ergo $x + y = a$ A

$x + z = b$ B

$y + z = c$ C

In Æquatione A $x = a - y$

Subſtituendo in B $a - y + z = b$

Et fit $z = b - a + y$

Subſtituendo in C $y + b - a + y = c$

Et fit $y = \frac{a + c - b}{2}$

## PROBLEMA XII.

INvenire quatuor numeros, ut terni juncti faciant poſtulatos numeros. Statutum ſit primum, & duos deinceps ſimul junctos facere 20, ſecundum, & duos deinceps facere 22, tertium & duos deinceps facere 24. Denique quartum & duos deinceps facere 27

Sint numeri $x . y . z . u$

Et ſumma omnium S

Erit $x + y + z + u = S$

Sed $x + y + z = 20$

Ergo $u = S - 20$

Sic invenitur $x = S - 22$

$y = S - 24$

$z = S - 27$

Sed quatuor ſimul efficiunt S

Quare addendo $4 S - 93 = S$

Et fit $S = 31$

Ergo numeri erunt $9 . 7 . 4 . 11.$

*Univerſaliter.*

$$x + y + z + u = S$$

Sed $x + y + z = a$

Ergo $u = S - a$

Sic $x = S - b$

$y = S - c$

$z = S - d$

Ergo $S = 4S - a - b - c - d$

Et fit $S = \frac{a + b + c + d}{3}$

## PROBLEMA XIII.

INvenire numerum æqualem quibuſcunque ſuis partibus; & quotcunque $+ m$.

Numerus quæſitus $x$

Erit ergo $x = \frac{ax}{b} + \frac{cx}{d} + \frac{ex}{f}$ &c. $+ m$.

Tollendo fractiones $bdfx = adfx + bcfx + bdex + bdfm$

Et fit $x = \frac{bdfm}{bdf - adf - bdf - bdc}$

## PROBLEMA XIV.

PEtrus auget fundum ut $4 : 5$, inde ut $2 : 3$, inde ut $6 : 7$; & tandem fundum fit 10000. Quæritur quantum erat?

Sit fundum quæſitum $x$.

Et primo fit $\frac{5x}{4}$; ſecundo $\frac{15x}{8}$: tertio $\frac{105x}{48}$

Qua-

Quare $\frac{105x}{48} = 10000$

Et fit $x = \frac{480000}{105}$

## PROBLEMA XV.

PEtrus, & Paulus æquales ſummas impendunt. Primus lucratur 126. ſecundus amittit 87. Fundum autem primi ſit duplum ſecundi. Quæruntur impendia?

Impendium comune $= x$

Fundum primi $x + 126$

Fundum ſecundi $x - 87$

Per conditionem problematis $x + 126 = 2x - 174$

Et fit $x = 300$.

*Univerſaliter.*

Impendium comune $x$

Fundum primi $= u + a$

Fundum ſecundi $= x - b$

$x + a = mx - mb$

Et fit $x = \frac{a + mb}{m - 1}$

## PROBLEMA XIV.

PEtrus auget fundum triente; hinc impendit 8. Auget inde quadrante, & mox impendit 15. Demum auget quintante & impendit 5. Fundum tandem fit 25. Quæritur primum fundum?

Fundum quæſitum $= x$

Et

Et fit $\frac{4x}{3}$; hinc $\frac{4x}{3} - 8$: & addito quadrante fit $\frac{5x}{3} - 10$. Quoniam autem impendit 15, erit $\frac{5x}{3} - 15$; cui addito quintante fit $6x - 30$; & adhuc ſubtracto 5 fit $2x - 35 = 5$

Quare $x = 30$

## PROBLEMA XVII.

UNum mobile percurrit ſpatia 6 tempore 1, & jam a tempore 8 incæpit moveri. Alium mobile percurruit 8 tempore 1; & incipit moveri. Quæritur tempus quo mobilia junguntur?

Tempus quæſitum $x$

Spatium peragratum a primo $= 48$

Spatium peragrandum a primo $6x$

Spatium peragrandum a ſecundo $8x$

Quoniam autem ſpatium ſecundi æquatur ambobus ſpatiis primi

Erit $8x = 6x + 48$

Et fit $x = 24$

### *Univerſaliter.*

Unum mobile percurrit ſpatium $a$ tempore 1; & jam a tempore $b$ deſceſſit. Aliud mobile percurrit ſpatium $c$ tempore 1; & incipit moveri. Quæritur tempus acceſſus?

Tempus quæſitum $x$

Spatium peragratum a primo $= ab$

Spatium peragrandum a primo $= ax$

Spatium peragrandum a ſecundo $= cx$

Ergo

Ergo $ab + ax = ca$

Et fit $x = \dfrac{ab}{c - a}$

## PROBLEMA XVIII.

DAto metallo, cujus uncia valet 8 & dato altero metallo, cujus uncia valet 16; efformari debeant unciæ 20 metalli mixti cujus uncia valeat 12. Quæritur quot unciæ accipiendæ ſint ex primo metallo, quot ex ſecundo.

Unciæ primi metalli $= x$

Unciæ ſecundi $= y$

Pretium primi propter uncias $x = 8x$

Pretium ſecundi propter unicas $y = 16y$

Pretium mixti totale $= 240$

Per primam conditionem $x + y = 20$ A

Per ſecundam $8x + 16y = 240$ B

In equatione A $x = 20 - y$

Quare fit $8x = 160 - 8y$

Subſtituendo in B $160 - 8y + 16y = 240$

Et fit $y = 10$; Quare $x = 10$

## PROBLEMA XIX.

DAtis duobus metallis mixtis, in quorum primo pars auri eſt 1, argenti 2; & in ſecundo pars auri 4, argenti 5; Ut fiat maſſa 7, cujus pars auri ſit 3, argenti 4; quæritur quanta portio ſumenda metalli primi? quanta ſecundi?

Portio primi $x$

Portio ſecundi $y$

Quoniam autem componentes debent eandem ha-

habere rationem ac compoſiti; ſi primum compoſitum 3 continet aurum 1, & argentum 2; Compoſitum $x$ continebit aurum $\frac{x}{3}$, argentum $\frac{2x}{3}$

Propter eandem rationem ſi ſecundum compoſitum 9 continet aurum 4, argentum 5; compoſitum $y$ continebit aurum $4y$, argentum $5y$. Quoniam autem ex conditione problematis aurum debet eſſe 3, argentum 4. fient duæ Æquationes.

$$\frac{x}{3} + \frac{4y}{9} = 3 \quad A$$

Et $$\frac{2x}{3} + \frac{5y}{9} = 4 \quad B$$

quæ ſolutæ a fractionibus erunt

$$3x + 4y = 27 \quad A$$
$$6x + 5y = 36 \quad B$$

In Æquatione A $3x = 27 - 4y$

Quare $6x = 54 - 8y$

Subſtituendo in B $54 - 8y + 5y = 36$

Et fit $y = 6$; $x = 8$.

## PROBLEMA XX.

Sint modo tria metalla mixta, quorum primum 12 habeant partes argenti M; 1 Æris N, 3 Auri O

Ita ut ſit $12\,M + 1\,N + 3\,O$

Sit ſecundum $1\,M + 13\,N + 3\,O$

Sicque tertium $0\,N + 14\,N + 2\,O$

Debeat componi novum mixtum quod ſit

$$4\,N + 9\,N + 3\,O$$

Quæritur quota pars datorum metallorum ſumi debeat?

Pars

Pars primi $= x$; ſecundi $y$; tertii $z$
Quare pars primi erit $12Mx + Nx + 3Ox$
Parſe ſecundi $My + 12Ny + 2Oy$
Pars tertii $0Mz + 14Nz + 2Oz$

Comparando ergo terminos ſecundum conditiones problematis, erit

Primo $12x + y = 4$ A
Secundo $x + 12y + 14z = 9$ B
Tertio $3x + 2y + zz = 3$ C
In Æquatione A $y = 4 - 12x$
Subſtituendo talem valorem in B, & C
Erit $14z = 143x - 39$ B
Et $2z = 33x - 9$ C
Quare $14z = 231x - 63$
Et ſubſtituendo in B
Erit $231x - 63 = 143x - 39$ B
Et fit $x = \frac{3}{11}$; $y = \frac{8}{11}$, $z = 0$

## PROBLEMA XXI.

DAto nunc pretio compoſitorum, & ratione componentium, invenire pretium cujuſcunque componentis.

Sit primum compoſitum $3M + 4N = 10.$ A
Secundum - $5M + 6N = 16.$ B
Sitque pretium primum componentis $= x$
Pretium ſecundi $= y$

Subſtituendo pretium loco componentium erit

$3x + 4y = 10.$ A
Et $5x + 6y = 16.$ B
In Æquatione A $x = \frac{10 - 4y}{3}$

Quare $5x = \frac{50 - 20y}{3}$

Subſtituendo in B $\frac{50 - 20y}{3} + 6y = 16$

Et fit $y = 1$; & $x = 2$

### *SCHOLION.*

HUjuſmodi Problemata dicuntur *Mixtionis*, quæ intellecta viam faciunt ad omnia hujuſce generis.

## *EXEMPLA PRO INDETERMINATIS.*

### PROBLEMA I.

DAtis tribus metallis, quorum primi uncia valet 4, ſecundi *6*, tertii *9*.

Ut componantur unciæ 20, quæ ſingulæ valeant 7, quot portiones illorum aſſumi debent?

Portio prima $x$, ſecunda $y$, tertia $z$.

Valor primus $4x$, ſecundus $6y$, tertius $9z$.

Quoniam autem unciæ debent eſſe 20

$$x + y + z = 20 \qquad A$$

Et quoniam valor omnium unciarum eſt 140.

$$4x + 6y + 9z = 14. \qquad B$$

In Æquatione A $x = 20 - y - z$

Et proinde $4x = 80 - 4y - 4z$

Subſtituendo in B

$$80 + 4y - 4z + 6y + 9z = 140. \qquad B$$

Quare $2y = 60 - 5z$

Oportet autem determinare arbitrario $z$

Sit

Sit $z = 10$, & fiet $y = 5$; $x = 5$
Sit $z = 8$, & fiet $y = 10$, $x = 2$

*SCHOLION.*

SI quatuor ſunt miſcibilia, tum determinandæ ſunt duæ quantitates. Si quinque, tres; & ſic procedendo.

PROBLEMA II.

DIſtribuenda ſit quantitas 100 hominibus 30; Aliis 8 pro ſingulis, aliis 5; aliis 1.
Quæritur quot accipient 8, quot 5, quot 1?
Claſſis prima $x$, ſecunda $y$, tertia $z$.
Per primam ergo conditionem

$$x + y + z = 30. \qquad A$$

Et per ſecundam

$$8x + 5y + z = 100. \qquad B$$

In æquatione A $\quad x = 30 - y - z$
Quare $\quad 8x = 240 - 8y - 8z$
Subſtituendo in B

$$240 - 8y - 8z + 5y + z = 100.$$

Nempe $\quad 140 - 3y - 7z = 0$
Et fit $\quad 140 - 3y = 7z$
Si $y$ ſit 7; $z = 17$; $x = 6$
Si $y$ ſit 14, $z = 14$; $x = 2$ quod infinitis modis fieri poteſt.

PROBLEMA II.

DEbeant emi fructus 40, trium ſpecierum. Prima ſpecie pro ſingulis ematur tribus argenteis,

ſecunda ſpecies 1, tertia $\frac{1}{12}$. Debent autem impendi argentei 40.

Quæritur quot fructus erunt primæ ſpeciei? quot ſecundæ? quot tertiæ?

Sit numerus primus $x$, ſecundus $y$, tertius $z$.

Et propter primam conditionem

$$x + y + z = 40. \qquad \text{A}$$

Et propter ſecundam

$$3x + y + \frac{z}{12} = 40. \qquad \text{B}$$

In æquatione A $\quad x = 40 - y - z$

Et proinde $\quad 3x = 120 - 3y - 3z.$

Subſtituendo in B

$$120 - 3y - 3z + y + \frac{z}{12} = 40$$

Unde fit $\quad 960 - 24y - 35z = 0$

Quare $\quad 960 - 24y = 35z$

Sit $\quad y = 5$, erit $z = 24$; $x = 11$.

## PROBLEMA IV.

DAtis duobus numeris 7. 20 aliis duos invenire, ut primus multiplicatus per 20 conficiat productum ſecundi per 7, & amplius 200.

Numerus primus $x$, ſecundus $y$

Ergo $\quad 20x = 7y + 200.$

Sit $\quad y = 10$, & erit $x = \frac{27}{2}$

Sed ſi quærantur integri, ad quod aliquo artificio opus eſt

Fiat $\quad 7y = 20x - 200$

Et

Et erit $y = \frac{20x}{7} - \frac{200}{7}$

Nempe $y = 2x + \frac{6x}{7} - 28 + -\frac{4}{7}$

Si fractiones $\frac{6x}{7} - \frac{4}{7}$ conficiunt integrum, tum $y$ erit numerus integer.

Ponatur ergo $\frac{6x}{7} - \frac{4}{7} = m$

Et erit $6x - 4 = 7m$

Quare $x = \frac{7m}{6} + \frac{4}{6}$

Nempe $x = m + \frac{m}{6} + \frac{4}{6}$

Ponantur fractiones $\frac{m}{6} + \frac{4}{6} = 1$

Et erit $m = 2$

Ex quo fit $x = 3$; $y = -20$

Quoniam autem $y$ fit negativus

Ponantur fractiones $\frac{m}{6} + \frac{4}{6} = 4$

Et fit $m = 20$

Ex quo fit $x = 24$; $x = 40$.

Et tales ſunt numeri quæſiti.

## SCHOLION.

Hæc methodus univerſalis eſt pro quæſtionibus indeterminatis, ut habeantur numeri integri; & in eo poſita eſt, ut fiat diviſio quantum fieri poteſt, & reſiduum æquatur integro donec fiunt numeri integri.

DE

## *DE SERIEBUS, ET DE EORUM SUMIS.*

## SECTIO III.

### *Definitiones.*

I. SI ſint plures quantitates, quæ cum certa lege progrediantur *Seriem* efformant, quæ vel *finita* eſt, vel *infinita*.

2. Cum quantitates continuo creſcunt Series dicitur *creſcens*, cum minuuntur, *decreſcens*.

Quæmadmodum infinitæ Legis excogitari poſſunt ſecundum quas quantitates progrediantur, ita infinitæ poſſunt dari ſpecies Serierum. Ex his quæ celebriores ſunt, & utiliores examinabimus præmiſſis quibuſdam Lemmatis de infinito.

### *LEMMATA.*

1. SI ſit ſeries numerorum naturalium

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \ldots\ldots\ldots n$$

ultimus terminus $n$ erit infinitus.

2. Si fiant quadrata horum numerorum

$$1.\ 4.\ 9.\ 16.\ 25.\ 64.\ \ldots\ldots\ nn$$

ultimus terminus erit $nn$, qui eſt infiniti infinitus, ſeu *infinitus ſecundi ordinis*.

3. Si fiant cubi, ultimus terminus erit $n^3$, nem-

pe

pe infinitus tertii ordinis. Ita concipi poſſunt infinita quarti, quinti ordinis in infinitum.

4. Si ſit ſeries decreſcens, ut

$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdot - \frac{1}{5} \cdots\cdots \frac{1}{n}$

ultimus terminus erit $\frac{1}{n}$ nempe *infiniteſimus*.

5. Si fiant quadrata, ultimus terminus erit $\frac{1}{nn}$; nempe infiniteſimus ſecundi ordinis.

6. Si fiant cubi, erit $\frac{1}{n^3}$ nempe infinitimus tertii ordinis. Ita concipi poſſunt infiniteſima quarti, quinti in infinitum.

7 Eadem ratio, quæ intercedit inter finitum, & primi ordinis infinitum, intercedit inter infinitum primi ordinis, & infinitum ſecundi.

8. Et quæ ratio intercedit intra infinitum primi ordinis, & finitum eſt inter finitum, & infiniteſimum primi ordinis.

9. Finitum multiplicatum per infinitum primi ordinis dat infinitum primi ordinis. Ut ſi $a$ ſupponatur quantitas finita, $n$ infinita, primi ordinis, $an$ erit infinita primi ordinis.

10. Multiplicando infinitum primum per primum ut $n$ per $n$, fit $nn$ nempe infinitum ſecundum.

11. Multiplicando primum $n$ per ſecundum $nn$, fit $n^3$ nempe tertium.

12. Dividendo infinitum primum per infinitum primum, fit finitum. Sic $\frac{n}{n} = 1$

13. Dividendo infinitum primum per ſecundum, fit infiniteſimum primum. Ut $\frac{n}{nn} = \frac{1}{n}$

14. Multiplicando infiniteſimum primum per infiniteſimum primum, fit infiniteſimum ſecundum. Ita $\frac{1}{n}$ multiplicatum per $\frac{1}{n}$ dat $\frac{1}{nn}$

15. Dividendo infiniteſimum primum per infiniteſimum primum, fit finitum. Ita $\frac{1}{n} : \frac{1}{n} = 1$

16. Dividendo infiniteſimum primum per ſecundum, fit infinitum. Sic $\frac{1}{n} : \frac{1}{nn} = n$

## *AXIOMA FUNDAMENTATE.*

## CAPUT I.

Quantitas infiniteſima adſumi poteſt ut nulla reſpectu ſuæ infinitæ.

Si $ſ = a + n$, ſitque $a$ finita $n$ vero infinita, fiat $ſ, n$

Si $ſ = n + nn$; fiat etiam $ſ = nn$

Hæc proprie non eſt æquatio, ſed *adæquatio*.

## *DE SERIE ARITHMETICA.*

Numerus indefinitus terminorum vel creſcentium vel decreſcentium per æquales differentia, dicitur. Series *Arithmetica*, ut A, vel B.

A 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . . . . . . . .

B 4 . 3 . 2 . 1 . 0 . − 1 . − 2 . − 3 .

Si

Si primus terminus dicatur $a$ & differentia $d$, quælibet ſeries Arithmetica exprimetur per hunc Canonem.

$a . a+d . a+2d . a+3d . a+4d . a+5d . a+6d . a+7d ..$

Si termini hujuſce Canonis attente conſiderentur, agnoſcetur terminos quoſcunque continere primum cum totidem differentiis, quot ſunt termini præcedentes. Sic tertius eſt $a + 2d$, quartus $a + 3d$ &c.

## *THEOREMA FUNDAMENTALE.*

QUæcunque ſit Series Arithmetica ſi addatur primus terminus & ultimus, ſecundus, & penultimus, tertius cum antepenultimo, & ſic proſequendo erunt ſemper æquales ſummæ

| | | |
|---|---|---|
| Primus & ultimus | = | $2a + 8d$ |
| Secundus, & penultimus | = | $2a + 8d$ |
| Tertius & ſeptimus | = | $2a + 8d$ |
| Quartus & ſextus | = | $2a + 8d$ |
| Quintus & quintus | = | $2a + 8d$ |

## *COROLLARIUM I.*

QUare ut habeatur omnium terminorum ſumma, addantur duo extremi; & multiplicetur eorum ſumma per dimidium numeri terminorum.

Ita ſi ſint octo termini

1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15.

ut habeatur illorum ſumma, multiplicetur 16, quæ eſt ſumma extremorum, per 4; & fit 64, quæ eſt ſumma quæſita.

## COROLLARIUM II.

Quare ſi primus dicatur $a$, ultimus $u$, ſumma quæſita S, & numerus terminorum $n$ erit Canon $S = \frac{\overline{a+u} \times n}{2}$

## COROLLARIUM III.

Quare ſi numerus terminorum eſt infinitus, ſumma erit infinita.

## COROLLARIUM IV.

Et ſi $u$ eſt infinitus, Canon fiet $\frac{nu}{2}$, evaneſcente nimirum quantitate finita $a$.

## COROLLARIUM V.

Quod ſi ſeries decreſcit ita ut $u$ ſit infiniteſima; tum Canon fiet $\frac{an}{2}$.

## PROBLEMA I.

Dato primo & ultimo termino & numero terminorum, invenire differentiam.

Sit primus terminus 1, ultimus 23, numerus terminorum 12, & quæratur differentia $d$.

Erit ultimus terminus per conſtitutionem primam ſeriei Arithmeticæ, $1 + 11d$. Sed ex hypotheſi æquatur 23.

Quare $1 + 11d = 23$; & fit $d = 2$.

## PROBLEMA II.

Dato ultimo termino 23, primo 1, & differentia 2 invenire numerum terminorum.

Sit ille $x$; Quare ultimus terminus eſt

$1 + \overline{x - 1} \times 2 = 23$

Et fit $x = 12$

## PROBLEMA III.

Dato primo termino 1, & differentia 2, invenire terminum centeſimum. Sit ille $x$. Et quoniam eſt $1 + 99 \times 2$, erit $x = 1 + 99 \times 2. = 199$

Eadem methodo quilibet alius invenitur.

## CAPUT IV.

Differentia eſt 2, numerus terminorum 12, ultimus 23, invenire primum

Sit ille $x$

Quoniam ultimus eſt $x + 22$

Erit ex hypotheſi $x + 22 = 23$

Et fit $x = 1$

## PROBLEMA V.

Primus terminus eſt 1; ultimus 23 numerus terminorum 12, invenire ſummam. Sit ſumma S; & quoniam per Canonem $S = \overline{a + u} \times n$

Erit $S = \overline{1 + 23}. 6 = 144$

## PROBLEMA VI.

NUmerus terminorum eſt 12, primus 1; ſumma omnium 144 invenire differentiam.

Differentia quæſita $x$.

& quoniam ultimus terminus eſt $1 + 11x$; erit

$$\overline{1 + 1 + 11x} \bowtie 6 = 144$$

Et fit $x = 2$

## *DE SERIE GEOMETRICA.*

## CAPUT II.

SI plures quantitates ſint in continua proportione Geometrica, dicitur *Series Geometrica:* quæ eſt *Creſcens*, ut A, vel *Decreſcens* ut B

A 1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . &c.

B $\frac{1}{1} . \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{1}{8} . \frac{1}{16} . \frac{1}{32}$ . . . . . . .

Si primus terminus dicatur $a$ & exponens rationis dicatur $m$ quæcunque Series Geometrica per hunc Canonem generalem repræſentabitur.

$$a . ma . m^2a . m^3a . m^4a . m^5a . m^6a . . . . .$$

Ubi obſervari poteſt quemcumque terminum æquari producto primi in poteſtatem exponentis, cujus gradus reſpondet numero terminorum præcedentium. Ita terminus quartus eſt $m^3a$, quintus $m^4a$ &c.

THEO-

## THEOREMA I. FUNDAMENTALE.

DAtis quotlibet terminis in Geometrica ſerie primus eſt ad ſecundum, ut ſumma omnium præter ultimum ad ſummam omnium præter primum.

Sit enim ſeries $a . b . c . d . e . f . g \ldots$

Erit ergo $a:b = b:c = c:d = d:e = e:f = f:g$

Ergo componendo

$$\overline{a+b+c+d+e+f} : \overline{b+c+d+e+f+g} = a:b$$

quod erat propoſitum.

## PROBLEMA I.

DAtis quotlibet terminis in ſerie Geometrica, invenire eorum ſummam.

Si primus dicatur $a$, ſecundus $b$, ultimus $u$, & ſumma quæſita $x$; erit per Theorema antecedens hæc proportio $a : b = x - u : x - a$.

Et fit $x = \dfrac{bu - aa}{b - a}$

Ut habeatur nempe ſumma omnium ex producto ſecundi in ultimum tollatur quadratum primi, & fiat diviſio per differentiam ſecundi & primi. Ita ſi detur ſeries

$1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64 . 128 . 256 . 512.$

cujus ſumma quæratur; erit

$$\frac{2 \times 512 - 1}{2 - 1} = 1023$$

CO-

## COROLLARIUM.

SE Series eſt infinita, & creſcens; ultimus terminus $u$ eſt infinitus & ſumma conſequenter infinita, quare in canone terminus $aa$ evaneſcit; fitque $x = \frac{ba}{b - a}$

Sed ſi Series eſt infinita decreſcens tum terminus ultimus eſt infiniteſimus. Quare $bu$ evaneſcit in Canone & fit $x = \frac{- aa}{b - a} = \frac{aa}{a - b}$

nempe ſumma omnium æquatur quadrato primi termini per differentiam primi & ſecundi diviſo.

Ita ſi detur ſeries $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{16} \cdots$ in infinitum; ſumma infinitarum hujuſmodi fractionum erit $1 : \frac{1}{2} = 2$

Et ſi ſit altera ſeries

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{64} \cdots$$

Summa infinitarum hujuſmodi fractionum erit

$$1 : \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$$

Et alterius Seriei

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{81} \cdots$$

Summa erit $1 : \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$

Unde exurgit methodus comparandi duas Series in-

inter ſe licet infinitas; & earum rationem in terminis finitis exponeres.

## PROBLEMA II.

DAto primo termino, & exponente invenire quemlibet Seriei Geometricæ terminum.

Sit primus terminus 3, exponens 2, & quærantur centeſimus terminus.

Quoniam ergo terminus centeſimus eſt productum 3 primi in poteſtatem *99* exponentis, multiplicetur 3 per 2 elevatum ad poteſtatem *99*; & habebitur terminus centeſimus.

## PROBLEMA III.

DAto primo termino 70, & numero terminorum 10; & termino ultimo 35840. Invenire exponentem Seriei $x$.

Quoniam ultimus terminus eſt

$$70\, x^{9} = 35840\text{; erit } x^{9} = 512$$

Quare extracta radice nona erit $x = 2$

## PROBLEMA VI.

PRimus terminus eſt 70, ultimus eſt 35840, exponens 2, invenire numerum terminorum $x$

Erit in hoc caſu $70 \times 2^{x} = 35840$

Quare $2^{x} = 512$

Po-

Poteſtas ergo numeri 2 æqualis 512 determinabit numerum terminorum præcedentium, & quia eſt poteſtas nona erunt novem termini præcedentes.

## PROBLEMA V.

Datis duabus quantitatibus $a$, & $b$ invenire quotlibet medias proportionales continuas.

Sit primo invenienda una media proportionalis $x$

Et erit $a : x = x : b$

Quare $x x = a b$, & $x = \sqrt{ab}$

Sint ſecundo inveniendæ duæ mediæ proportionales $x$, & $z$

Et erit Series $a . x . z . b$

Et quoniam ut prima ad quartam ita cubus primæ ad ſecundæ cubum erit $a : b = a^3 : x^3$

Quare $a x^3 = a^3 b$

Et fit $x = \sqrt[3]{aab}$

Series ergo fit $a . \sqrt[3]{aab} . z . b$

Quoniam vero $zz = b \sqrt[3]{aab} = \sqrt[3]{aab^4}$

$$= \overline{aab^4}^{\frac{1}{3}}$$

Extrahendo radicem quadratam

Erit $z = \overline{abb}^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{abb}$

Sint

Sint tertio loco inveniendæ tres $x : y . z$; & erit Series $a : x . y . z . b$

Et eadem methodo erit prima mediarum

$\sqrt[4]{a^3b}$; ſecunda. $\sqrt[4]{aabb}$; tertia. $\sqrt[4]{ab^3}$

## *DE SERIEBUS FIGURATORUM.*

## C A P U T III.

SI ſit ſeries unitatum, quæ ordine addatur; inde earum ſummæ adhuc ordine addantur, & ſic procedendo, ut eſt in figura, efformantur numeri, qui *Figurati* vocantur.

| | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Unitatis generatrices | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 3 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | 0 | 0 |
| | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | 0 |
| | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 |

Prima ſeries eſt *unitatum*, ſecunda numerorum *naturalium*, tertia *trigonalium*, quarta *piramidalium*, hinc *triangulopiramidalium*, piramidopiramidalium &c.

In hujuſcemodi numeris infinitæ continentur proprietates, quæ partem nobiliorem, & præclariorem Arithmeticæ conſtituunt. Nos tres funda-

mentales notabimus, & quibus cætere, omnes dependent.

1. Et primo illud obſervandum venit quod ſeriebus ita conſtructis tot zeri in qualibet ſerie inveniuntur, quot ſunt ſeries, quæ ipſam præcedunt. Ita in ſecunda unus eſt zero, in tertia duo, in quarta tres, & ſic procedendo.

2. Quilibet numerus cujuslibet ſeriei equatur ſummæ omnium numerorum ſeriei præcedentis ſupra poſitorum. Ita in ſerie tertia triangularis 10 æquatur ſummæ omnium naturalium ſupra ſe poſitorum. Et in ſerie quarta pyramidalis 35 æquatur ſummæ omnium triangularium, & in ſexta Pyramidopyramidalis æquuntur ſummæ omnium antecedentium triangulopyramidalium.

3. In quacunque ſerie omnium ad ſummam totidem ultimo æqualium ( incipiendo a cyphris ) habet eam rationem quam unitas ad exponentem ſeriei. (*a*)

Sic in prima ſerie ſumma quinque terminorum ad terminum ultimum multiplicatum per 5 eſt ut 1 : 1 In ſecunda ut 1 : 2; in tertia ut 1 : 3, & ſic procedendo.

Ex quibus proprietatibus exurgit Methodus determinandi ſummas quotlibet terminorum in quacunque hujuſcemodi ſerie, ut nunc explicabimus.

Data qualibet ſerie figuratorum invenire quotlibet terminorum ſummam.

Sit primo loco determinanda ſumma numerorum naturalium, quorum numerus eſt *n* ( incipiendo

---

( a ) *Videatur demonſtratio hujus proprietatis in Arte conjectandi* P. 2. C. 3.

do ab unitate). Cumque ultimus hujus ſeriei terminus per ſecundam proprietatem ſit $n$, & numerus terminorum, ſi fiat principium a zero, ſit $n + 1$, erit per tertiam proprietatem ſumma omnium ad productum numeri $n$ per $n + 1$ ut $1 : 2$ Si ergo ſumma dicatur S; erit $S = \frac{n \,.\, \overline{n+1}}{1 \,.\, 2}$

Sit ſecundo loco determinanda ſumma numerorum triangularium. Et quoniam ultimus terminus æquatur omnibus præcedentis ſeriei, ſi numerus triangularium addendorum ſit $n$; erit ultimus $= \frac{n \,.\, \overline{n+1}}{1 \,.\, 2}$. Sed numerus terminorum (incipiendo a cyphris eſt $n + 2$. Cum ergo ſumma omnium per tertiam proprietatem ad productum ultimi per numerum terminorum ſit ut $1 : 3$, erit $S = \frac{n \,.\, \overline{n+1} \,.\, \overline{n+2}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$

Eadem methodo pro Piramidalibus

Fit $S = \frac{n \,.\, \overline{n+1} \,.\, \overline{n+2} \,.\, \overline{n+3}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}$

Et pro quacunque ſerie, cujus exponens eſt $c$ in infinitum

erit $S = \frac{n \,.\, \overline{n+1} \,.\, \overline{n+2} \,.\, \overline{n+3} \ldots\ldots \overline{n+c-1}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\,.\,.\, c}$

Quo Canone poſito ſummæ quorumlibet Figuratorum, & cujuſcunque ſpeciei habentur.

Sit enim exempli gratia quærenda ſumma ſex triangularium; Et quoniam $n$ in hac hypotheſi eſt $6$, & $1 = 3$.

Erit S $= \frac{n \cdot \overline{n+1} \cdot \overline{n+2}}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

Nempe $= \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$

Si quæratur ſumma decem pyramidalium; tum $n = 10$, & $1 = 4$

Ergo S $= \frac{n \cdot \overline{n+1} \cdot \overline{n+2} \cdot \overline{n+3}}{1 \cdot 2 \quad 3 \cdot 4}$

$= \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 715.$

## *SCHOLION.*

SI numerus $n$ incipiat a cyphris tot unitates ab illo erunt ſubtrahendæ, quod cyphræ reperiuntur in ſerie. Ita ſi ſex ſunt termini incipiendo ab unitate, fiunt 5 ſi incipiatur a zero in ſecunda ſerie, & quatuor in tertia, & quinque in quarta. Computando ergo terminos a cyphris, numerus $n$. remanet idem in prima ſerie, ſed in ſecunda, tertia, quarta &c,

Fit $n-1$; $n-2$, $n-3$ &c. & Canon erit

$\frac{n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{n-2} \cdot \overline{n-3} \cdot \overline{n-4} \ldots \overline{n-c+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \quad 4 \ldots\ldots\ldots c}$

DE

# DE SERIEBUS POTESTATUM.

## CAPUT IV.

Sint primo loco poteſtates primæ

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . . . . . .

Cumque hæc ſeries eadem ſit ac numerorum naturalium, ſi numerus terminorum dicatur $n$, erit ex dictis $S = \frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{nn+n}{2}$.

Sit ſecundo loco ſeries quadratorum

1 . 4 . 16 . 25 . 36 . 49 . 64 . . . . . .

Cumque terminus $n$ tertiæ ſeriei æquetur terminis $n$ ſecundæ ſeriei erit $= \frac{nn+n}{2}$.

Computando horum ſummam ſecundum

Canonem fit $\frac{S\,nn + S\,n}{2} = \frac{n^3}{6} + \frac{nn}{2} + \frac{n}{3}$

Quare $S\,nn + S\,n = \frac{n^3}{3} + nn + \frac{2n}{3}$

Ergo $S\,nn = \frac{n^3}{3} + nn + \frac{2n}{3} - S\,n$

Subſtituendo loco $S\,n$ valorem $\frac{nn+n}{2}$

Erit $S\,nn = \frac{n^3}{3} + \frac{nn}{2} + \frac{n}{6}$

Sit tertio loco ſeries cuborum. Et quoniam terminus $n$ quartæ ſeriei æquatur omnibus ſeriei præcedentis

Erit

Erit $\frac{n^3 + 3nn + 2n}{6}$

Et horum ſumma comparata ſecundum Canonem fiet

$$\frac{S\,n^3 + 3\,S\,nn + 2\,S\,n}{6} = \frac{n^4 + 6\,n^3 + 11nn + 6n}{24}$$

Subſtituendo loco S $nn$, & S $n$ valores jam ſupra inventos

Erit $S\,n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{nn}{4}$

Eadem methodo proſequendo fiunt Canones pro quibuslibet ſuperioribus poteſtatibus, ut eſt in figura.

Summa numerorum naturalium $= \frac{nn}{2} + \frac{n}{2}$

Summa quadratorum $= \frac{n^3}{3} + \frac{nn}{2} + \frac{n}{6}$

Summa cuborum $= \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{nn}{4}$

Summa quadratoquadratorum $= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$

Surſolidorum $= \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{nn}{12}$

Quadrocuborum $= \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42}$

Qui Canones in infinitum extendi poſſunt, obſervando legem, ſecundum quam procedunt.

## *DE SERIEBUS HYPSICLIS,*

## CAPUT V.

1. EX ſeriebus Arithmeticis alias ſeries efformavit Hypſicles.

Sit primo ſeries Arithmetica, cujus termini habeant differentiam zero, & ab unitate incipiat, tum addendo terminos fit ſeries numeroorum naturalis.

Sit ſecundo loco ſeries quæ incipiat ab unitate, & differentiam habeat 1, tumque exurgunt triangulares.

Si differentia eſt 2, fiunt quadrati; ſi 3, Pentagoni, ſi 4, Exagoni, & ita porro, ut in figura

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Series Arithmetica | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. |
| Series Naturalium | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. |
| Series Arithmetica | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. |
| Series Trigonalium | 1. | 3. | 6. | 10. | 15. | 21. |
| Series Arithmetica | 1. | 3. | 5. | 7. | 9. | 11. |
| Series Quadratorum | 1. | 4. | 9. | 16. | 05. | 33. |
| Series Arithmetica | 1. | 4. | 7. | 10. | 13. | 16. |
| Series Pentagonorum | 1. | 5. | 12. | 22. | 35. | 51. |
| Series Arithmetica | 1. | 5. | 9. | 13. | 17. | 21. |
| Series Exagonorum | 1. | 6. | 15. | 28. | 45. | 66. |

Vocantur hi numeri triangulares, quadrati&c. propter analogias, quas habent ad haſce figuras.

2. *Latus Polygoni* vocatur numerus terminorum, ex quibus efformatur terminus ſeriei.

3. *Numerus* vero *angularis* eſt exponens figuræ analoghæ ad numerum Polygonum. Ita in triangularibus eſt 3, in quadrati 4, in pentagonis 5, in exagonis 6, & generaliter ſuperat binario differentiam ſeriei generatricis. PRO-

## PROBLEMA I.

*Dato latere, & numero angulari determinare numerum polygonum.*

Sit latus $= n$
Numerus angularis $= a$
Primus terminus ſeriei generatricis $= 1$.
Differentia terminorum per ſuperius notata $= a - 2$.

Et quoniam ultimus terminus ſeriei cujuslibet Arithmeticæ æquatur primo + producto differentiæ in numerum terminorum præcedentium

Erit $= 1 + \overline{n - 1} \cdot \overline{a - 2}$

Summa primi & ultimi $= 2 + \overline{n - 1} \cdot \overline{a - 2}$

Multiplicando hanc ſummam per ſemiſſem terminorum habetur eorum ſumma, quæ erit

$$\frac{n^2 \cdot \overline{a - 2} - n \cdot \overline{a - 4}}{2}$$

Sed quilibet Polygonus æquatur ſummæ terminorum ſeriei generatricis. Ergo Polygonus quilibet exprimetur per illum Canonem. Ex hoc autem Canone exſurgent Canones particulares pro quolibet Polygono.

Nam ſi $a = 3$; quilibet triangularis $= \frac{nn + n}{2}$

Si $a = 4$, quilibet quadratus $= \frac{2nn + 0n}{2}$

Si $a = 5$, quilibet pentagonus $= \frac{3n - n}{2}$

Si $a = 6$, quilibet exagonus $= \frac{4n - 2n}{2}$

PRO-

# PROBLEMA II.

*Addere quotlibet Polygonos.*

Cum quilibet Polygonus = $\frac{n^2 \cdot \overline{a-2} - n \cdot \overline{a-4}}{2}$ erit omnium polygonorum ſumma

$$\frac{S\,nn \cdot \overline{a-2} + S\,n \cdot \overline{a-4}}{2}$$

Subſtituendo loco S $nn$, & S $n$ earum valores, quos ſupra invenimus, fiet ſumma omnium polygonorum pro quacunque ſerie

$$\frac{n^3 \cdot \overline{a-2} + 3nn + a - 5 - n}{6}$$

ex quo Canone univerſali fiunt particulares Canones, determinando numerum $a$. Cum ergo ſi quærantur trigonales, $a$ ſit 3, & pro quadratis 4, & pro pentagonis 5 &c. Erunt ſummarum Canones

Pro Trigonalibus $\frac{n^3 + 3nn + 2n}{6}$

Pro Quadratis $\frac{2n^3 + 3nn + n}{6}$

Pro Pentagonis $\frac{3n^3 + 3nn}{6}$

Pro Exagonis $\frac{4n^3 + 3nn - n}{6}$

Pro Eptagonis $\frac{5n^3 + 3nn - 2n}{6}$

quorum Canonum legem obſervando, haud difficile eſt illos ad quorumlibet polygonorum ſummas continuare.

## DE SERIEBUS COMPOSITIS.

### CAPUT V.

Series *Compoſita* vocatur ſeries fractionum, cujus denominatores progrediuntur ſecundum unam legem, & numeratores ſecundum aliam.

### LEMMA I.

Sit ſeries fractionum infinita

$$\frac{a \,.\, a+c \,.\, a+2c \,.\, a+3c \,.\,.\,.\,.\,.}{b \quad b+d \quad b+2d \quad b+3d}$$

cujus numeratores, & denominatores procedunt Arithmetice, dico, quod ultimus terminus erit fractio $\frac{c}{d}$; nimirum differentia Prima diviſa per differentiam ſecundam. Etenim ultimus terminus

$$= \frac{a+\infty c}{b+\infty d}$$

Quare cum $a$, & $b$ negligi poſſint reſpectu infiniti erit $= \frac{\infty c}{\infty d} = \frac{c}{d}$

### LEMMA II.

Si ſit ſeries infinita fractionum $\frac{a}{b} \,.\, \frac{c}{d} \,.\, \frac{e}{f}$; in qua numeratores creſcunt Arithmetice, & denomina-

natores Geometricè, ultimus terminus $=$ o & revolvendo ſeriem $= \infty$.

Termini enim Geometrici creſcunt ſemper pluſquam Arithmetici; demum fiunt infinite majores. Quare in primo caſu ultimus terminus fit infiniteſimus, in ſecundo infinitus.

*De ſeriebus infinitis fractionum, quarum denominatores ſunt continue proportionales Geometrici, & numeratores ſunt Figurati.*

## C A P U T VI.

1. SI numeratores ſunt ut numeri naturales, velut in ſerie A reſolvetur ſeries in alias Geometricas B, C, D, E, quarum ſumma erit nova ſeries Geometrica (excepta prima.) ſumma ergo hujus ſeriei dabit quæſitum ſummum.

$$A \quad \frac{a}{b} + \frac{a+c}{bd} + \frac{a+2c}{bdd} + \frac{a+3c}{bd^3} \ldots\ldots 3.c$$

$$B \quad \frac{a}{b} + \frac{a}{bd} + \frac{a}{bdd} + \frac{a}{bd^3} = \frac{ad}{bd-b}$$

$$C \quad \frac{c}{b} + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} = \frac{c}{bd-b}$$

$$D \quad \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} = \frac{c}{bdd-bd^4}$$

$$E \quad + \frac{c}{bd^3} = \frac{c}{bd^3-bdd}$$

$$\text{Summa } B+C+D+E = \frac{ad}{bd-b} + \frac{cd}{b.\overline{d-1}^2}$$

2. Si numeratores ſunt ut Trigonales, reſolvetur in aliam, cujus numeratores erunt ut Naturales, & cujus ſumma erit ad primam ut $dd : \overline{d-1}$

Sit ſeries $\frac{c}{b} + \frac{3c}{bd} + \frac{6c}{bdd} + \frac{10c}{bd^3} \ldots$

Poſito $d - 1 = z \quad \frac{c}{b} + \frac{c}{bd} + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bdd} = \frac{cd}{bz}$

$$\frac{2c}{bd} + \frac{2c}{bdd} + \frac{2c}{bdd} = \frac{2c}{bz}$$

$$+ \frac{3c}{bdd} + \frac{3c}{bdd} = \frac{3c}{bdz}$$

$$+ \frac{4c}{bd^3} = \frac{4c}{bddz}$$

Summa totalis $= \frac{cd^3}{bz^3}$

3. Si numeratores ſint ut Pyramidales, reſolvetur in aliam, cujus numeratores erunt ut Trigonales, & erit ad antecedendi ut $d : z$

Quare ejus ſumma erit $= \frac{cd^4}{bz^4}$

4. Generaliter ſi numeratores ſint quilibet Figurati, ſumma ſeriei poſito $m$ exponente Figuratorum

Erit $= \frac{cd^m}{bz^m}$

5. Si numeratores ſunt ut Quadrati, reſolvetur in aliam, cujus numeratores ſunt Arithmetici

Sit

$$\text{Sit} \quad \frac{c}{b} + \frac{4c}{bd} + \frac{9c}{bdd} + \frac{16c}{bd^3} \dots$$

$$\frac{c}{b} + \frac{c}{bd} + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bddd} = \frac{cd}{bz}$$

$$+ \frac{3c}{bd} + \frac{3c}{bdd} + \frac{3c}{bd^3} = \frac{3c}{bz}$$

$$+ \frac{5c}{bdd} + \frac{5c}{bd^3} = \frac{5c}{bdz}$$

$$+ \frac{7c}{bd^3} = \frac{7c}{bddz}$$

$$\text{Summa novæ ſeriei} = \frac{cddz + 2cd}{bz^3}$$

6. Si numeratores ſunt ut Cubi reſolvetur in aliam, cujus numeratores erunt ſextupli Trigonalium aucti unitate cujus ſumma

$$= \frac{cdd}{bzz} + \frac{6cd^3}{bz^4}$$

Ex quibus Canonibus educentur ſummæ infinitarum hujuſmodi ſerierum in quocunque caſu, ut eſt in figura.

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} \dots = 2$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{6}{8} + \frac{10}{16} \dots = 4$$

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{10}{8} + \frac{20}{16} \dots = 8$$

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{9}{8} + \frac{16}{16} \dots = 6$$

$$\frac{1}{2} + \frac{8}{4} + \frac{27}{8} + \frac{64}{16} \dots = 26$$

*De Seriebus fractionum quarum numeratores ſunt æquales, & denominatores ſunt numeri figurati.*

## CAPUT VII.

1. SI quilibet terminus ſeriei M ſubtrahatur a ſuo antecedente ſit nova ſeries P, cujus ſumma æquatur primo termino datæ ſeriei minus ultimo, ut ſit in figura.

$$M \quad \frac{2a}{c} + \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} \ldots\ldots$$

$$\frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \frac{6a}{5c}$$

$$P \quad \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} = \frac{2a}{c} - \frac{\infty a}{\infty c} = \frac{a}{c}$$

2. Sit ſeries harmonica

$$A \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots\ldots$$

Et ſubtrahatur a ſemetipſa ut in allatis exemplis, fietque nova ſeries B

$$B \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} \ldots\ldots$$

Cum autem novæ hujus ſeriei ſumma debeat æquari primo termino ſeriei A minus ultimo per ſupradicta; & ultimus terminus ſeriei harmonicæ ſit infiniteſimus erit hæc ſumma æqualis primo termino, ac proinde æquatur 1.

Cum denominatores ſeriei B ſint dupli Trigonalium, multiplicando ejus terminos per 2, fiet nova ſeries C

$$C \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} \ldots\ldots$$

cujus denominatores ſunt Trigonales, & erit ejus ſumma = 2

3. Si ſeries C ſubtrahatur a ſemetipſa, oritur alia ſeries D

D $\frac{2}{3} + \frac{2}{12} + \frac{2}{30} + \frac{2}{60} \ldots$

cujus ſumma ex Canone erit = 1

Quoniam autem ſunt ejus denominatores tripli Pyramidalium ſi quilibet terminus multiplicetur per 3 fiet ſeries E

E $\frac{2}{1} + \frac{2}{4} + \frac{2}{10} + \frac{2}{20} \ldots$

cujus denominatores erunt Pyramidales, & ſi rurſus termini dividantur per 2 fit ſeries F

F $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} \ldots$

cujus numeratores ſunt unitates & denominatores ſunt Pyramidales.

Multiplicetur ergo ſumma ſeriei D per $\frac{3}{2}$, & habebitur ſumma ſeriei F = $\frac{3}{2}$

& ſerſei E = 3

4. Si ſeries F a ſeipſa ſubtrahitur emergit G

G $\frac{3}{4} + \frac{3}{20} + \frac{3}{60} + \frac{3}{280} \ldots$

cujus ſumma = 1

Quoniam autem denominatores ſunt quadrupli triangulo pyramidalium ſi dividantur termini per $\frac{4}{3}$ fiet nova ſeries H

H $\frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} \ldots$

in qua numeratores ſunt unitates, & denominatores

res ſunt triangulo-pyramidales.

Cum ergo ſumma ſeriei G ſit $= 1$.

Multiplicando per $\frac{4}{3}$, erit ſumma H $= \frac{4}{3}$

Eadem methodo inveniri poſſunt ſummæ ſerierum ſequentium, quæ erunt $\frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}$ in infinitum.

## SCHOLION.

Summa ſeriei infinitæ harmonicæ

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

eſt infinita.

Hujus theorematis elegantem demonſtrationem invenit Joannes Bernoulius.

Cum enim ſubtrahendo quæſiviſſet ſeriem enaſcentem invenit $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{20} \cdot\cdot\cdot\cdot$

cujus ſumma $= 1$

Reſolvendo mox hanc novam ſeriem in ſeries Geometricas ut alia methodo inveniret ſummam, invenit rurſus ejus ſummam æquari ſeriei harmonicæ. At hoc eſſet abſurdum, ſi ſeries harmonica eſſet finita, pars etenim eſſet æqualis toto. Quare concludendum erit ipſam eſſe infinitam.

## COROLLARIUM.

Ergo ſi ſit quilibet numerus ſerierum, in quibus numeratores ſint unitates, & denominatores

ſint ordine ut figurati, eorum ſummæ exponentur per hanc ſeriem.

$\frac{1}{0} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9}$ &c.

## PROBLEMA III.

INvenire in infinitum ſeries infinitas ſummabiles.

Sit fractio $\frac{l}{m+n}$, & fiat continua diviſio. Erit quotus infinita ſeries.

$$\frac{l}{m} - \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^3} - \frac{ln^3}{m^4} + \frac{ln^4}{m^5} \ldots = \frac{l}{m+n}$$

Sit exempli gratia $\frac{1}{3} = \frac{1}{2+1}$, & erit

$l = 1$; $m = 1$; $n = 2$, & fiet

Series $\frac{1}{1} - 2 + 4 - 8 + 16 \ldots\ldots = \frac{1}{3}$

## *DE VARIATIONIBUS.*

## CAPUT VIII.

V*Ariationes* vocantur mutationes ordinis, aut ſitus, quæ accidere poſſunt pluribus.

Ubi obſervandum eſt res variabiles poſſe dupliciter ſumi, vel ut ſingulæ ſint diverſæ vel ut aliquot ſint unius ſpeciei, aliquot alterius.

PRO-

## PROBLEMA I.

*Determinare Variationes, cum ſingulæ res variabiles ſunt diverſæ.*

1. UNius rei *a* una eſt variatio.
2. Duarum *a*, & *b* ſunt duæ *ab*, & *ba*.

3. Si vero ſint tres, ipſe primo tali modo poterunt diſponi, ut prima ſit *a*, & quoniam reliquæ duobus modis poſſunt diſponi, ſequitur quod cum *a* ſit prima, duæ poterunt fieri variationes. Duæ pariter cum eſt prima *b*, & duæ cum eſt prima *c*. Quare trium erunt ſex variationes. Nempe *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*.

4. Si res ſint quatuor quoniam pro qualibet prima ſex ſunt variationes, erunt omnes vigintiquatuor. Quare ſi fiunt numeri 1. 2. 3. 4.

Primus numerus exponet variationes unius, 1. 2 exponet variationes duorum, 1. 2. 3 exponet pro tribus, 1. 2. 3. 4. pro quatuor.

Simili modo ſi ſint res quotcunque *n* exponentur earum variatione per hanc ſeriem 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. . . . . *n*

Quare ſi ſint octo res diverſæ erunt earum variationes 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. = 40320

## PROBLEMA II.

*Determinare variationes, cum aliquot ex variabilibus ſunt ejuſdem ſpeciei.*

1. SIt numerus rerum *aaabcd* in quibus res *a* ter repetatur. Ad inveniendas earum variatio-

nes obſervo, quod ſi omnes eſſent diverſæ & loco trium *aaa* eſſent a*Aa* poſſent ex ſupradictis hæ tres variari ſex modis, cæteris in ſuo ſitu manentibus. Cum autem ſint ſimiles ex hypotheſi, ac proinde conſiderari debeant ut una res, ſequitur numerum totalem variationum fieri tantum ſextam partem. Quod ſi eſſent quatuor fieret pars vigeſima quarta. Quare generaliter dividendus erit numerus totalis variationum per numerum variationum, qui reſpondet numero rerum, quæ ſunt ejuſdem ſpeciei.

2. Quod ſi duæ ſpecies repetantur, ut in *aaabbc*, eadem methodo invenietur quod veluti propter tres *aaa* debet dividi numerus per 6, ita propter duas *bb* debeat dividi per 2; ac proinde fiet pars duodecima.

Unde exurgit Methodus generalis inveniendi in qualibet hypotheſi variationes. Ut nempe fiat productum totale reſpondens numero rerum; hinc dividatur per producta omnium variationum reſpondentium rebus, quæ ſunt ejuſdem ſpeciei.

Ita ſi dentur octo res, quarum duæ ſint unius ſpeciei, & tres alterius, erunt variationes

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.}{1.\ 2.\quad 1.\ 2.\ 3.} = 2560$$

## *DE COMBINATIONIBUS.*

## CAPUT IX.

1. Combinationes dicuntur conjunctiones aliquot rerum ex aliqua multitudine deſumptarum quæ ſimul jungantur nulla habita ratione ſitus.

2.Si

2. Si binæ binæ ſumuntur, fit combinatio per *Binarios*; ſi ternæ ternæ per Ternarios, ſic per *Quaternarios*, *Quinquenarios* &c. Si ſumuntur ſingulæ tum combinatio dicitur *Unitatum*; ſi nulla ſumitur combinatio fit *nulla*.

3. Numerus autem ſecundum quem combinantur dicitur combinationis exponens; qui ſi binæ binæ ſumantur eſt 2, ſi ternæ ternæ 3; & ſic procedendo.

## PROBLEMA I.

*Invenire numerum combinationum, cum res combinabiles ſunt ſingulæ diverſarum ſpecierum, & quælibet poteſt ſecum combinari.*

Sint combinandæ res *a*. *b*. *c*. *d* &c.

Ut agnoſcantur earum combinationes ponantur primo in ſerie *a*. *b*. *c*. *d*. ut videre eſt in figura. Hinc jungatur littera *a* & ſecum, & cum reliquis, & ponantur ordine binaria ita ut litteræ *a* reſpondeat *aa*, litteræ *b* reſpondeant *ab*, *bb*, & litteræ *c* reſpondeant *ac*, *bc*, *cc*. Demum litteræ *d*. *ad*. *bd*. *cd*. *dd*. Ut habeantur Ternarii oportet combinare litteras ſingulas & cum binariis ſuæ ſeriei, & cum binariis ſerierum præcedentium, & fiunt ut eſt in figura.

*a*.*aa*.*aaa*.
*b*.*ab*.*bb*.*aab*.*abb*.*bbb*.
*c*.*ac*.*bc*.*cc*.*aac*.*abc*.*bbc*.*acc*.*bcc*.*ccc*.
*d*.*ad*.*bd*.*cd*.*dd*.*aad*.*abd*.*bbd*.*acd*.*bcd*.*ccd*.*add*.*bdd*.*cdd*.*ddd*.

Si conſideretur attente hæc tabula, facile agnoſcitur combinationes unitatum efformare ſeriem unitatum. 1. 1. 1. 1.

At

At binaria efformare ſeriem numerorum naturalium 1. 2. 3. 4.

Ternaria ſeriem Trigonalium 1. 3. 6. 10.

Quod ſi tabula continuetur agnoſcetur quaternaria efformare ſeriem triangulo-piramidalium 1. 4. 10. 20. 35

Quinquenaria 1. 5. 15. 35 & ſic procedendo.

Ex quibus exurgit Methodus determinandi numerum combinationum in problemate quæſitum ſecundum quemlibet exponentem.

Sit enim $n$ numerus rerum combinabilium, & erunt combinatione ſolitariæ æquales numero unitatum; binaria æqualia ſummæ numerorum naturalium, ternaria trigonalium, quaternaria pyramidalium.

Quare idem Canon, ex quo dantur ſummæ numerorum figuratorum, dabit etiam numerum combinationum ſecundum quemlibet exponentem.

Nempe $\frac{n\,.\,n+1\,.\,n+2\,.\,n+3\,.\,n+4\ldots n+c-1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots\ldots c}$

Sint exempli gratia quærenda binaria rerum 8; & fit $n = 8$, $c = 2$.

Quare Canon fit $\frac{8\,.\,9}{1\,.\,2} = 36$

Si quærantur Ternaria, canon fit $\frac{8.\,9.\,10.}{1.\,2.\,3.} = 120$

Si quaternaria fit $\frac{8.\,9.\,10.\,11}{1.\,2.\,3.\,4.}$

Si res ſint quatuor, & quærantur quinaria; tum $n = 4$; $c = 5$.

Et fit Canon $\frac{4.\,5.\,6.\,7.\,8}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}$

$= \frac{6.\,7.\,8}{1.\,2.\,3} = 168.$

## PROBLEMA II.

*Determinare numerum combinationum, cum res combinabiles ſunt omnes diverſæ, & nulla poteſt ſecum combinari.*

SInt res combinabiles *a. b. c. d. e*

Ponantur in ſerie litteræ datæ, & ut habeantur Binaria addantur quælibet littera ſuis præcedentibus; & ut habeantur Ternaria, addatur præcedentibus Ternarii, & ſic procedendo, ut eſt in figura

*a*:<br>
*b. ab*<br>
*c. ac. bc. abc.*<br>
*d. ad. bd. cd. abd. acd. bcd. abcd.*<br>
*e. ae. be. ce. de. abe. ace. bce. ade. bde. cde. abce. abde. acde. bcde. abcde*

Si figura conſideretur, obſervari poteſt ſeries combinationum efformare ſeries numerorum figuratorum incipientes a cyphris.

Ita quantitates ſolitarias efformare ſeriem unitatum generatricum, 1. 1. 1. 1. 1.

Binaria efformare ſeriem numerorum naturalium 0. 1. 2. 3. 4<br>
Ternaria trigonalium 0. 0. 1. 3. 6<br>
Quaternaria pyramidalium 0. 0. 0. 1. 4<br>
Quinaria trigonopiramidalium 0. 0. 0. 0. 1

Summa ergo combinationum æquabitur ſummæ figuratorum incipientium a cyphris.

Quare ſi res combinabiles dicantur *n*

Erit ſumma unitatum *n*

Summa

Summa Binariorum $\frac{n \cdot \overline{n-1}}{1 \cdot 2}$

Summa Ternariorum $\frac{n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

Summa Quaternariorum $\frac{n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{n-2} \cdot \overline{n-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

Et generaliter poſito Exponente $c$ erunt combinationes

$$\frac{n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{n-2} \cdot \overline{n-3} \cdot \overline{1-4} \cdot \overline{n-5} \ldots \overline{n-1+c}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots\ldots c}$$

Sint ergo res 90.
Erit ſumma Unitatum $= 90$
Summa Binariorum $= \frac{90 \cdot 89}{1 \cdot 2}$

Summa Ternariorum $= \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

Summa Quaternariorum $= \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

## PROBLEMA III.

*Dato in eadem hypotheſi numero rerum combinabilium, & dato exponente combinationis, ſi ex eodem numero aliquot res eligantur, ut A. B. C. D. E. determinare quot Combinationes contineant A. B. C. excluſis D. & E.*

SIt numerus rerum combinabilium $n$; numerus rerum electarum $m$; pars electarum $b$; exponens

nens $c$; erit numerus rerum præter electa $= n - m$, quibus combinatis ſecundum exponentem $c - b$, fiet ex regula præcedenti Canon

$$\frac{n - m . n - m - 1 . n - m - 2 \ldots n - m - c + b + 1}{1 . 2 . 3 \ldots\ldots\ldots c - b}$$

& habentur combinationes omnium præter electas $b$.

Addendo his combinationibus partem $b$ tum habentur combinationes ſecundum exponens $c$, ut quærebatur.

Sint exempli gratia res 20, ex quibus 4 eligantur & quærantur ſenarii, in quibus tres ex electis combinuantur excluſis reliquis, tum Canon fit $\frac{15. \ 14. \ 13.}{1. \ 2. \ 3.}$ ex quo intelligitur idem eſſe ac ſumere ternarios reliquarum 15.

## PROBLEMA IV.

*Dato numero rerum combinabilium quarum nulla poteſt ſecum combinari, determinare numerum combinationum variatarum juxta quemlibet exponentem.*

SI numerus dicatur $n$, & exponens $b$, numerus combinationum ſine variationibus exponetur per Canonem

$$\frac{n . n - 1 . n - 2 . n - 3 \ldots n - c + 1}{1 . 2 . 3 \ 4 \ldots\ldots\ldots c}$$

ut patet ex dicetis.

Sed quia omnes iſtæ combinationes componuntur ex rebus, quorum numerus eſt $c$; & conſequenter poteſt fieri variatio juxta Canonem $1. 2. 3. 4 \ldots\ldots c$. ſequitur quod ut habeantur combinationes variatæ,

 mul-

multiplicandus ſit combinationum numerus per numerum variationum, ac proinde Canon fit

$n.n-1.n-2\ n-3\ ....\ n-c+1$

Quare ſi ſint res 10; & quærantur ſenarii variati, erunt 10. 9. 8. 7. 6. 5. = 151200

## PROBLEMA V.

*Dato numero rerum combinabilium, quarum qualibet poteſt ſecum combinari, determinare numerum combinationum variatarum juxta quemlibet exponentem.*

Sint quotlibet res *a. b. c.* quarum numerus eſt *n.* & primo combinationes ſolitariæ tot erunt quot ſunt res; nempe *n.*

Ut habeantur binarii ponatur *a* prima, & fient binarii *aa. ab. ac. ad.* quorum numerus *n*, nempe in noſtra hypotheſi 4. & quoniam poſita qualibet alia prima totidem habentur binarii, erunt binarii 16, & in quocunque caſu *nn.*

Si cum binariis combinetur prima littera, habentur 16 ternarii, quare combinando omnes erunt quater 16. Multiplicandus erit igitur 16. per 4. & fit cubus; & in genere numerus ternatiorum erit $n^3$. Eadem methodo inveniuntur quaternarii $n^4$, quinarii $n^5$, & poſito exponente *c*; erit Canon $n^c$.

Sint ergo ſex res, quarum quaternarii variati quærantur, & erum $6^4 = 1296$

Sic ex 9 cyphris numericis quaternarii omnibus modis variati ſunt $9^4 = 6561.$

Sic ſi ſint Vocales A. E. I. O quibus exprimuntur

tur in Logica quatuor propoſitionum ſpecies , prima Univerſalis Affirmativa , ſecunda Univerſalis Negativa, tertia Particularis Affirmativa , quarta Particularis Negativa, quarum ternarium eſt Syllogiſmus, cognoſcentur omnes poſſibiles Syllogiſmi, determinando omnes poſſibiles hujuſmodi ternarios, & erunt ſecundum regulam $4^3 = 64$ non 36, ut cenſuit Ariſtoteles. ( *a* )

## *DE BINOMII POTESTATIBUS IN INFINITUM.*

## CAPUT X.

Si ſit Binomium $\overline{a + b}$ , & multiplicentur per ſe ipſum, erit ejus quadratum $aa + 2ab + bb$; ejus cubus $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ ; & ſi continuantur multiplicatio, erunt ejus poteſtates, ut in figura.



( *a* ) *Si plura cupis , lege excellentes tractatus Jacobi Bernoulli in Arte conjectandi*.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | | | | | | | |
| $aa$ | $2ab$ | $1.\ bb$ | | | | | | |
| $a^3$ | $3aab$ | $3abb$ | $1.\ b^3$ | | | | | |
| $a^4$ | $4a^3b$ | $6aabb$ | $4ab^3$ | $1.\ b^4$ | | | | |
| $a^5$ | $5a^4b$ | $10a^3bb$ | $10aab^3$ | $5ab^4$ | $1.\ b^5$ | | | |
| $a^6$ | $6a^5b$ | $15a^4bb$ | $20a^3b^3$ | $15aab^4$ | $6ab^5$ | $1.\ b^6$ | | |
| $a^7$ | $7a^6b$ | $21a^5bb$ | $35a^4b^3$ | $35a^3b^4$ | $21aab^5$ | $7ab^6$ | $1.\ b^7$ | |
| $a^8$ | $8a^7b$ | $28a^6bb$ | $35a^5b^3$ | $70a^4b^4$ | $56a^3b^5$ | $28aab^6$ | $8ab^7$ | $1.\ b^8$ |

Si conſideretur hæc tabula, illum obſervandum venit terminos poteſtatum componi ex numeris, & litteris. Qua lege litteræ procedunt, haud eſt difficile intelligere, ſi ſingulæ ex his poteſtatibus examinentur. In quacunque enim poteſtate littera $a$ incipit a poteſtate, cui debet elevari Binomium, & gradatim per omnes poteſtates deſcendit utique ad poteſtatem nullam. E contra littera $b$ incipit a poteſtate nulla, & aſcendit uſque ad exponentem datum; ex quibus fit ut facile inveniantur elementa litteralia.

Sit enim elevandum binomium $a + b$ ad poteſtatem ſextam. Fiant ſeries A, & B, & ſinguli termini

A

$$
\begin{array}{ll}
A & a^6 . a^5 . a^4 . a^3 . a^2 . a^1 . a^0 \\
B & b^0 . b^1 . b^2 . b^3 . b^4 . b^5 . b^6 \\
\hline
 & a^6 . ba^5 . bba^4 . b^3a^3 . b^4aa . b^5a . b^6
\end{array}
$$

Producta unius ſeriei multiplicentur per ſingulos alterius, & habebuntur litteralia producta.

Ut autem habeantur numeri, ſive *Coefficientes*, ſive *Unciæ*, ut Oughtredus vocat, illud obſervandum venit numeros ipſos procedere ſecundum combinationes dati exponentis.

Ita in ſexta poteſtate, cujus nempe exponens eſt 6, primus coefficiens eſt 1, nempe idem ac combinatio nulla; ſecundus eſt 6; nempe numerus combinationum ex unitatibus, tertius eſt 15, nempe quot ſunt binaria numeri 6; inde 20. 15. 6. 1 nempe quot ſunt Ternaria, Quaternaria, Quinaria, & Senaria numeri 6.

Sic in poteſtate ſeptima coefficientes ſunt 1. 7. 21. 35. 21. 7. 1. quot nempe ſunt combinationes exponentis $n$; incipiendo a combinatione nulla uſque ad ſeptenarios.

Quare idem Canon, qui combinationes continet, continebit etiam coefficientes Binomii, & ſi exponens dicatur $n$: erunt coefficientes cujuſcunque poteſtatis in infinitum

$$
\frac{n . n-1 . n-2 . n-3 . n-4 \ldots\ldots}{1 . 2 . 3 . 4 \ldots\ldots}
$$

Et Canon pro ſingulis Poteſtatibus in infinitum erit

$$a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} a^{n-2} bb$$

$$+ \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3$$

$$+ \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4} b^4$$

$$+ \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{n-5} b^5$$

&c.

## *SCHOLION.*

QUoniam exponens $n$ poteſt ſignificare numerum negativum, ac poſitivum, & integrum æque ac fractum, maxima hujuſce Canonis Admirabilis utilitas in eo præſertim poſita eſt ut æque ad elevandas quaſcunque quantitates ad poteſtates poſitivas, quam negativas inſerviat, nempe & ad efformandam quamlibet quantitatis datæ Potentiam, & ad extrahendam quamlibet Radicem.

Illud autem diſcriminis eſt, quod ubi datæ Potentiæ exponens eſt poſitivus, quoniam tum $n$ eſt numerus integer, ſeries tandem convergit, & fit finita. At ſi extrahenda ſit radix, quoniam tum $n$ eſt numerus fractus, ſeries nunquam convergit, & fit infinita.

Sit enim exempli graria $a + b$ elevandus ad poteſta-

ſtatem 2; & erit $n = 2$. Quare ex Canone poteſtas erit $a^2 + 2ab + bb$

Sed ſi extrahi debeat quadrata radix, erit tunc $a + b$ elevandus ad poteſtatem $\frac{1}{2}$; quare $n = \frac{1}{2}$

& ex Canone fiet $a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} b + \frac{1}{2} \cdot - \frac{1}{4} a^{-\frac{3}{2}} b$ . . . . . . in infinitum.

Velut autem Canon inſervit ad elevandum Binomium, æqualiter etiam inſerviet ad Trinomium $a + b + c$; ſi reducatur $b + c$ ad unam quantitatem $d$; ſimiliter ad Quadrinomium, & Polynomium quodcunque, ubi creſcit tantum calculi labor, non methodi difficultas.

DE

# DE ALTIS ÆQUATIONIBUS.

## PARS II.

### Definitiones.

1. ÆQuatio dicitur, cum una quantitas æquatur alteri quantitati.

Ut ſi detur $4x = 9$

Vel $6x + 7 = 9$

Vel $6xx + 4x = 8$

Vel univerſaliter $ax + xx = bb$

2. *Æquatio quadratica* eſt cum maximus gradus, ad quem quantitas incognita aſſurgit eſt quadratum.

Ut $xx + 5x = 6$

3. *Æquatio cubica*, cum quantitas incognita ad cubum aſſurgit

Ut $x^3 - 8xx + 6x = 10$

4. *Æquatio quadrato-quadratica* cum ad quadrato-quadratum

Ut $x^4 - 6x^3 + 4xx - 6x = 10$

5. Generaliter vocatur primi, ſecundi, tertii gradus Æquatio juxta maximam poteſtatem, ad quam in ipſa elevatur incognita quantitas.

6. *Terminus* in quo reperitur maxima incognitæ poteſtas dicitur primus; & poteſtates ordine minores conſtituunt *ſecundum*, *tertium*, *quartum* & ſic in allata Æquatione $x^4$ eſt primus terminus,

$- 6 x^3$ ſecundus, hinc tertius, quartus, quintus.

7. *Æquatio*, cui deeſt aliquis terminus dicitur *Deficiens*

Ut $x^4 \ldots - 6 xx \ldots + 5 = 0$

Ubi deficit ſecundus & quartus.

8. Quantitates datæ, quæ multiplicant incognitam in quocunque termino, vocantur terminorum *Coefficientes*.

Ut ſi detur $x^4 + 4 x^3 - 6 x x + 8 x - 6 = 0$ 4 eſt coefficiens termini ſecundi, $- 6$ tertii, $+ 8$ quarti.

9. Terminus vero $- 6$, in quo incognita non reperitur dicitur *Homogeneus*.

10. *Quantitas* quæ loco incognitæ ſubſtituta facit ut omnes termini ſimul evaneſcant, & fiant nihil, dicitur *Æquationis Radix*.

Et cum hujuſmodi quantitates plures eſſe poſſint in una eademque Æquatione, plures quoque poſſunt eſſe radices.

Ut ſi detur Æquatio $x x - 5 x + 6 = 0$ quoniam ſubſtituendo 2 loco $x$, termini evaneſcunt, & fiunt æquales nihilo, erit 2 radix hujuſcemodi Æquationis. Et ſimiliter quia ſubſtituto 3, fiunt zero, erit 3 altera radix.

Quoniam vero nulla alia quantitas ſubſtituta loco incognitæ facit terminos evaneſcere, nulla alia quantitas erit radix hujuſce Æquationis.

Ubi notandum tot ad ſummum eſſe poſſe radices Æquationis, quot ſunt gradus ad quos incognita aſſurgit.

Sic quia ad duos gradus tantum in allata Æquatione aſſurgit incognita, duas tantum & non plu-

res habere poteſt radices. In æquatione cubica tres, in biquadratica quatuor, & ſic in infinitum.

Ex quo quidem pendet varietas ſolutionum in Problematis. Ibi enim duæ ſolutiones eſſe poſſunt ubi duæ radices inveniuntur, & tres ubi tres radices.

Sic ſi quæratur numerus cujus quadratum imminutum quinque hujuſcemodi numeris æquatur 6, poſito numero quæſito $x$, fiet Æquatio $xx - 5x = 6$ & quia duæ ſunt ibi radices, nempe 2, & 3; duo erunt numeri qui propoſitam conditionem habebunt.

Sic ſi datur Æquatio

$$x^3 - 4xx + 26x - 24 = 0$$

quoniam ipſius tres ſunt radices, nempe 2. 3. 4. tres quoque diverſas ſolutiones admittit.

Quot ſi quatuor, aut quinque darentur numeri quæſitas conditiones habentes, tum fieret quatuor, vel quinque dimenſionum Æquatio, & ſic in infinitum.

11. Quotquot autem ſint radices ad duas reducantur ſpecies. Aliæ enim ſunt *poſitivæ*, aliæ *negativæ*. Poteſt enim problema ad utrumque proponi, quare juxta conditiones problematis numerus quæſitus nunc poſitivus erit nunc negativus.

Ita ſi quæratur quantum quiſque boni habeant, qui 100 habens pro fundo lucratus ſit 20, erit fundum quæſitum 120; ſed ſi amiſerit 120, tum fundum erit negativum, nempe 20, quod idem eſt ac habere 20 in contrariam partem.

Imo iiſdem conditionibus reſpondere poteſt tam poſitiva quam negativa quantitas. Quare utriuſque ſpeciei radices erunt in Æquatione.

Ut

Ut ſi detur Æquatio $x\,x + x - 6 = 0$ cujus ſunt duæ radices $2$. $-3$ id argumento erit tam ex numero poſitivo $2$, quam ex negativo $-3$ ſolvi problema.

12. Sive autem ſint poſitivæ ſive negativæ, poſſunt eſſe vel *Rationales*, vel *Irationales*. Primæ ſunt quæ numeris exprimuntur ſive integris, ſive fractis. Secundæ quæ per numeros exacte deſignari nequeunt, & tantum per lineas Geometricas. Primi generis ſunt quicunque numeri, alterius generis Poteſtatum radices quæ vocantur etiam ſurdæ. Ut $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$. Sed quoniam $\sqrt{4}$ extrahi poteſt, & eſt 2, quantitas illa non erit *ſurda*, ſed *rationalis*.

13. Quod ſi problema contradictionem involvit, tum impoſſibile erit invenire radices.

Sic ſi quæratur numerus, cujus quadratum adſcito quadruplo ipſius numeri $+ 10$ faciat zero, fiet Æquatio $x\,x + 4x + 10 = 0$

Sed quoniam talis quantitas eſt quocunque modo impoſſibilis erunt etiam impoſſibiles hujus Æquationis radices; & ſi quantitati æquantur, quantitas iſta contradictionem involvit. Inquirendo autem radices hujuſce Æquationis invenitur una $= \sqrt{-8} - 2$ altera $= -\sqrt{-8} - 2$

Utraque tamen contradictoria & impoſſibilis; cum $\sqrt{-8}$ ut in prima parte demonſtratum eſt ſit inaſſignabilis.

Hujuſmodi radices *Imaginariæ* vocantur, & tales ſunt quæ æquantur Radicalibus Poteſtatum negativarum dimenſionum parium.

Ut $\sqrt{-4}$, $\sqrt[4]{-2}$, $\sqrt[6]{-8}$ &c.

Cumque tales in Æquatione inveniuntur, id argumento eſt propoſitum problema eſſe impoſſibile.

## *GENESIS, ET NATURA ÆQUATIONUM.*

### CAPUT I.

Sit æquatio ſimplex $x - 3 = 0$ & multiplicetur per aliam æquationem ſimplicem $x - 4 = 0$ fiet æquatio quadratica $xx - 7x + 12 = 0$.

Si rurſus hæc æquatio multiplicetur per $x - 5 = 0$ fit Æquatio cubica

$$x^3 - 12xx + 47x - 60 = 0$$

Rurſus multiplicando per $x - 6$ fit Æquatio biquadratica

$$x^4 - 18x^3 + 119xx - 368x + 360 = 0$$

Eodem modo procedendum in litteralibus.

Sit enim $x - a = 0$, & multiplicetur per $x - b$, & fiet Æquatio quadratica

$$\begin{array}{llll} xx & -ax & +ab & = 0 \\ & -bx & & \end{array}$$

Rurſus multiplicetur per $x - c$, & fiet Æquatio cubica

$$\begin{array}{lllll} x^3 & -axx & +acx & & \\ & -bxx & +bcx & -abc & = 0 \\ & -cxx & +abx & & \end{array}$$

Multiplicetur etiam per $x - d$ & fit Æquatio biquadratica

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -axxx & +acxx & -abcx & \\ & -bxxx & +bcxx & -acdx & \\ & -cxxx & +abxx & -bcdx & = 0 \\ & -dxxx & +adxx & -abdx & \\ & & +bdxx & & \\ & & +cdxx & & \end{array}$$

Et ſic in infinitum.

Ex qua formatione Æquationum plures emergunt obſervationes, quæ ſunt totius Artis Analyticæ fundamentum, ut primi notarunt Carteſius, & Harriotus.

1. Et primo illud obſervari poteſt quod quælibet Æquatio altioris ordinis poſſit ſemper conſiderari ut productum ex æquationibus ſimplicibus, quæ tot ſunt, quot ſunt gradus in Æquatione compoſita. Sic Æquatio quadratica ex duabus ſimplicibus efformatur, cubica ex tribus, quadrato-quadrata ex quatuor, & ſic in infinitum.

2. Quare ſi detur Æquatio ſimplex, poterit ſemper Æquatio compoſita per eam dividi, & ad gradum minorem deprimi.

Sic quoniam Æquatio

$$x^4 - 18x^3 + 119xx - 368x + 360 = 0$$

componitur ex quatuor ſimplicibus quarum una eſt $x - 2 = 0$ poterit per eam dividi exacte & fiet $x^3 - 20xx + 99x - 467 = 0$

Poterit quoque eadem Æquatio dividi per $x - 3$, $x - 4$, $x - 5$ & fiet exacta diviſio; & deprimetur ſemper ad Cubicam.

Quod ſi innoteſcunt duæ æquationes ſimplices, poterit ſemper Æquatio compoſita dividi per earundem productum, & duobus gradibus deprimi.

Sic quia duæ ex componentibus ſunt $x - 2$, $x - 3$, quorum productum eſt $xx - 5x + 6 = 0$ poterit illa per idem productum dividi, & fiet quotus $xx - 9x + 20 = 0$

Eodem modo intelligi poteſt, per productum trium ſit diviſibilis ut ſi ipſa dividatur per productum Æquationum componentium $x - 2$, $x - 3$,

$x - 4$; fiet exacta diviſio, & quotus erit $x - 5 = 0$ quæ eſt quarta Æquatio componens. Idem eſto de litteralibus.

Ex quibus deducitur methodus experiundi an aliqua quantitas ſit radix. Nempe ut efformetur ex ipſa Æquatio ſimplex, & per eam dividatur propoſita Æquatio. Si enim quantitas aſſumpta eſt radix, tum fiet exacta diviſio.

Sic ſi datur Æquatio

$$x^4 - 18x^3 + 119xx - 368x + 360 = 0$$

& probandum ſit an 2 ſit, juxta radix, dividatur præfata Æquatio per $x - 2$, per quam cum fiat exacta diviſio, recte concluditur 2 eſſe juſtam radicem. Et quoniam eadem Æquatio exacte dividitur per $x - 3$, $x - 4$, $x - 5$, erit quælibet ex his quantitatibus juſta radix.

Sed ſi dividatur per $x - 6$, vel $x - 7$, quoniam non fit exacta diviſio, concludendum erit neutrum numerum eſſe radicem.

Eodem modo ſi detur Æquatio litteralis

$$\begin{matrix} xx - ax + ab = 0 \\ \quad - bx \end{matrix}$$

cujus radices ſunt $a$, & $b$ poterit exacte dividi per $x - a$, & per $x - b$

Sed ſi dividatur per $x - c$; quoniam non fit exacta diviſio, $c$ non erit Æquationis præfatæ radix.

3. Alia obſervatio eſt ipſa conſtitutio Coefficientium.

Sit enim primo Æquatio univerſalis $\begin{matrix} xx - ax + ab, \\ - bx \end{matrix}$

cujus duæ ſunt radices $a$, & $b$; & illud primo obſer-

ſervari poteſt coefficientem ſecundi termini eſſe aggregatum ipſarum radicum $a$, & $b$, ſed contrario ſigno expoſitarum, homogeneum vero eſt productum ipſarum radicum.

Sit ſecundo loco AEquatio cubica

$$\begin{array}{l} x^3 - axx + abx \\ \quad - bxx + acx - abc = 0 \\ \quad - xx + bcx \end{array}$$

& obſervari poteſt coefficientem ſecundi termini eſſe aggregatum ipſarum met radicum $a$, $b$, $c$, coefficientem termini tertii eſſe aggregatum productorum ex ſingulis binis, & homogeneum eſſe productum ex ternis.

Eodem modo, quælibet efformetur AEquatio, cognoſci poterit ſecundi termini coefficientem eſſe aggregatum omnium radicum, coefficientem tertii eſſe aggregatum productorum ex ſingulis binis, quarti eſſe aggregatum productorum ex ſingulis ternis, & ſic procedendo fiet aggregatum ex quaternis, quinis, ſenis, &c. uſque ad homogeneum, quod eſt omnium radicum productum.

Ex quibus ſequitur quod ſi detur exempli gratia AEquatio biquadratica

$$x^4 - 18x^3 + 119xx - 368x + 360 = 0$$

cujus radices quærantur, problema eo redit, ut quærantur quatuor numeri, quorum aggregatum eſt 18, aggregatum productorum ex binis eſt 119, aggregatum productorum ex ſingulis ternis eſt 368, tandem productum ex quatuor eſt 360.

Ex qua obſervatione prodit prima generalis methodus eruendi radices rationales, quæ AEquationem componunt. Cum enim Homogeneum ſit ipſa-

ſarum productum erit radix AEquationis aliquis Homogenei productor. Quærantur itaque homogenei productores, & probetur quinam ex ipſis ſubſtitutus in AEquatione terminos omnes ad nihilum redigit, & erit ipſe productor AEquationis radix.

Sit enim exempli gratia

$$xx - 5x + 6 = 0$$

& quoniam productores ipſius $6$ ſunt $1, 2, 3, 6$; jam ſubſtituto $1$ termini non evaneſcunt, quare $1$ non erit AEquationis radix. Sed ſubſtituto tam $2$, quam $3$. evaneſcunt termini, uterque ergo erit radix.

Similiter ſi ſit æquatio univerſalis

$$\begin{matrix} xx - ax + ab = 0 \\ - bx \end{matrix}$$

Quoniam homogenei factores ſunt $a$, & $b$. Subſtituatur $a$, & quia termini tunc fiunt

$$aa - aa - ab + ab = 0$$

erit $a$ AEquationis radix.

Similiter ſi ſubſtituatur $b$, fient termini

$$bb - ab - bb + ab = 0$$

Quare $b$ erit altera radix.

Idem dic de quacunque altiori AEquatione.

Quare opus erit omnes diviſores homogenei cognoſcere.

*Datæ quantitatis invenire omnes diviſores.*

1. SI quantitas data ſit numerus, dividatur ille per minimum ſui diviſorem, & quotus adhuc per minimum, & ſic procedendo uſque dum quotus fiat indiviſibilis, & tali modo habebuntur omnes primi diviſores. Tum capiantur producta

cx

ex ſingulis binis, ternis, quaternis &c. & habebuntur diviſores compoſiti.

Ita ſi numeri 20 omnes diviſores quærantur, dividatur primo per 2, & quotus erit 10, hinc 10 per 2, & quotus erit 5, qui eſt indiviſibilis. Diviſores ergo primi erunt 1. 2. 2. 5. At qui ex binis componuntur ſunt 4. 10; & qui ex ternis eſt 20. Quare omnes diviſores erunt 1. 2. 2. 4. 5. 10. 20.

Simili modo ſit 140.

Diviſores primi ſunt 1. 2. 2. 5. 7.

Diviſores ex binis 4. 10. 14. 35.

Diviſores ex ternis 20. 28. 70.

Diviſores ex quaternis 140.

Si quantitas ſit litteralis, eodem modo procedendum.

Ita ſi ſit quantitas 8*mnn*

Dividatur primo per 2, & quotus 4*mnn* adhue per 2, & quotus 2*mnn* per 2, hinc 2*mnn*, per 2, ut fiat *mnn*. Hinc *mnn* per *m*, & fiet *nn*, quo diviſo per *n*, fiet *n*, qui eſt indiviſibilis.

Quare quantitatis 8*mmn* diviſores primi ſunt 1. 2. 2. 2. *m*. *n*. *n*.

Diviſores ex binis 4. 2*m*. 2*n*

Diviſores ex ternis 8*m*. 8*n*.

Ex quaternis 8*mn*. 8*nn*.

Ex quinis 4*mnn*.

Ex ſenis 8*mnn*, quæ eſt qua quantitas propoſita 8*mnn*.

4. Ex ipſa hac conſtitutione Æquationum illud obſervat Harriotus, quod toties ſibi eadem ſigna ſuccedunt quot ſunt in Æquatione radices negativæ, & toties alternant quot ſunt poſitivæ.

Sic in æquatione quadratica

$$xx - 5x + 6 = 0$$

cujus duæ ſunt poſitivæ radices 2, & 3, bis quoque alternant ſigna, ſeu contrario modo ſibi ſuccedunt.

Et in æquatione cubica

$$x^3 - 12xx + 47x - 60 = 0$$

cujus tres ſunt poſitivæ radices nempe 3. 4. 5. ter quoque alternant ſigna.

At in æquatione $xx + 5x + 6 = 0$ cujus duæ ſunt negativæ radices nempe $-2. -3$; bis idem ſignum ſibi ſuccedit.

Et in æquatione cubica

$$x^3 + 12xx + 47x + 60 = 0$$

cujus tres ſunt negativæ radices $-3. -4. -5.$ ter ſibi ſuccedit ſignum +

At in æquatione $xx + x - 6 = 0$ ubi duæ radices ſunt $2. -3.$ ſemel ſignum ſibi ſuccedit, & ſemel alternat.

Unde prodit regula cognoſcendi quot in data Equatione ſint negativæ radices, & quot poſitivæ.

Ut in æquatione $x^3 - 3xx - 10x + 24 = 0$ quoniam duæ fiunt mutationes ſignorum de + in $-$; & de $-$ in + duæ erunt poſitivæ radices & quoniam ſemel ſignum $-$ ſibi ſuccedit, una erit negativa.

Quæ quidem regula extenditur ad quaſcumque Æquationes ex radicibus realibus compoſitas; excipitur autem ſi in Æquatione dentur imaginariæ.

5. Ex hac obſervatione Harrioti duæ aliæ obſervationes deduci poſſunt, quæ ſunt tanquam illius Corollaria.

Primo quod radices poſitivæ AEquationis mutari poſ-

poſſint in negativas; & e contra negativæ in poſitivas, quod fit mutando ſigna in terminis quibuſcunque paribus æquationis, ſigno immutato in imparibus.

Ut ſi detur AEquatio

$$x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$$

cujus tres ſunt poſitivæ radices 2. 3. 4. & una negativa − 5. ſi mutentur ſigna, ut præſcriptum eſt, fiet AEquatio

$$x^4 + 4x^3 + 17xx - 106x + 120 = 0$$

cujus tres ſunt radices negativæ − 2. − 3 − 4, & una poſita 5.

Secundo cum datur AEquatio deficiens, neceſſe eſt ut dentur poſitivæ, & negativæ radices, quæ ſimul deſtruant aliquum terminum.

Cum autem deficit ſecundus terminus neceſſe eſt ut ſumma negativarum æquetur ſummæ poſitivarum; Cum tertius deficit, producta negativa ex binis æquantur productis poſitivis.

Si quartus, producta ternorum ſe deſtruent & ſic in infinitum.

Sic ſi ſit æquatio

$$x^3 \ldots - 15x + 30 = 0$$

In qua radices ſunt 2. 3. − 5. Quoniam 2 + 3 − 5 ſe deſtruunt hinc fit ut deſit ſecundus terminus.

Et in æquatione univerſali

$$\begin{array}{llll} x^3 & - axx & + abx & - abc = 0 \\ & - bxx & - acx & \\ & + cxx & - bcx. & \end{array}$$

ſi $c = a + b$, evaneſcet ſecundus terminus; ac ſi $ab = ac + bc$ evaneſcet tertius.

 6. Cum

6. Cum in æquatione radices ſunt imaginariæ; illud notandum primo quod eæ ſemper erunt in numero pari. Nam alio modo contradictio non evaneſceret, neque coefficientes reales apparerent.

Sic in æquatione $xx - 4x + 10 = 0$ duæ radices ſunt imaginariæ; nempe $2 + \sqrt{-10}$; $2 - \sqrt{-10}$ quæ ſimul productæ dant AEquationem prædictam.

In æquatione $x + 6 = 0$ quatuor ſunt radices imaginariæ nempe $\sqrt{+\sqrt{-6}}$, $\sqrt{-\sqrt{-6}}$
$-\sqrt{+\sqrt{-6}}$ $-\sqrt{-\sqrt{-6}}$

Ex quibus concludi poteſt, quod quælibet AEquatio, cujus gradus ſit par, poteſt quidem conſtare ex ſolis imaginariis; & conſequenter eſſe abſolute impoſſibilis.

At æquatio cujus gradus ſit impar, debet ſemper continere unum ſaltem radicem realem ac proinde ſemper eſt poſſibilis.

Illud notandum ſecundo quod ubi dantur radices imaginariæ illæ debent eſſe vel ambæ *puræ* vel ambæ *mixtæ*. Puras vocamus quæ ex ſola quantitate impoſſibili conſtant ut $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$; Mixtas, quæ ex aggregato poſſibilium, & impoſſibilium, ut $2 + \sqrt{-2}$, $2 - \sqrt{-2}$.

Cum ſunt puræ, neceſſe eſt ut ab utraque deſignetur eadem quantitas imaginaria, ab una nempe poſitive, ab altera negative.

Sic in æquatione $xx + 2 = 0$ altera radix eſt $\sqrt{-2}$; altera $-\sqrt{-2}$

Cum vero ſunt mixtæ, oportet utramque deſignare eundem numerum, & eamdem quantitatem imaginariam. Ita ſi ponantur $x - 3 + \sqrt{-4}$, & $x - 3 - \sqrt{-4}$ & multiplicentur hujuſmodi quantitates inter ſe, evaneſcent radicalia, & fiat AEqua-

quatio $xx - 6x + 13 = 0$

At ſi alio quocunque modo ſumantur non fient coefficientes rationales.

Ex quibus concluditur, quod ſi æquatio conſtet conſtet ex coefficientibus rationalibus, radices, ſi quas habet, imaginariæ hujuſmodi conditiones habebunt.

6. Ut cognoſcatur quot ſint radices impoſſibiles in data AEquatione hanc regulam ponit in Arithmetica univerſali Nevutonus.

*Fiat ſeries fractionum*, quorum denominatores ſunt numeri in hac progreſſione 1. 2. 3. 4. 5. &c. ad numerum uſque pergendo qui eſt dimenſionum æquationis; numeratores vero ſit eadem ſeries ordine inverſo. Dividatur unaquæque fractio poſterior per priorem, & collocentur fractiones prodeuntes ſuper terminis mediis æquationis. Si quadratum cujuſque termini ductum in fractionem ſibi imminentem ſit majus quam rectangulum terminorum utrinque exiſtentium, collocetur ſignum $+$, ſin minus, ſignum $-$.

Sub primo vero, & ultimo termino collocetur ſignum $+$. Et tot erunt radices impoſſibiles, quot ſunt in ſubſcriptorum ſignorum ſerie mutationes de $+$ in $-$, & de $-$ in $+$.

Sit exempli gratia AEquatio

$$x^3 + pxx + 3ppx - q = 0$$

Fiat ſeries $\frac{3}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3}$

Et diviſo ſecundo termino per primum, tertio per ſecundum collocentur prodeuntes fractiones ſuper terminis intermediis, ut ſit in figura.

$$x^3 + p^{\frac{1}{3}}xx + 3pp^{\frac{1}{3}}x - q = 0$$
$$+ \quad - \quad + \quad +$$

Quoniam ergo quadratum $ppx^4$ ductum in imminentem fractionem $\frac{1}{3}$ dat $ppx^4$; quod minus eſt quam rectangulum ex adjacentibus, nempe $3ppx^4$, ponatur ſignum − ſub ſecundo termino. At quia tertii termini quadratum $9p^4xx$ multiplicatum in ſibi imminentem fractionem dat $3p^4xx$, quod majus eſt quam rectangulum − $pqxx$ ex ſuis adjacentibus, collocetur ſub ipſo ſignum +. Sub primo vero & ultimo collocetur + & quoniam duæ ſunt mutationes in ſignis, duæ quoque erunt radices impoſſibiles.

Sic Aequatio

$$x^3 - 4xx + 4xx - 6 = 0$$
$$+ \quad + \quad - \quad +$$

poſitis ſecundum regulam ſignis agnoſcetur habere duas radices impoſſibiles.

Si AEquatio ſit deficiens, ut

$$x^7 - 2x^6 + 3x^5 - 2x^4 + x^3 \ldots\ldots - 5 = 0$$
$$+ \quad - \quad + \quad \circ \quad + \quad + \quad - \quad + \quad +$$

ponantur ſigna alterna, ſed ſub homogeneo ſit ſemper +. Et quoniam ſex ſunt ſignorum mutationes, ſex habebit radices impoſſibiles.

Sed cum quidam ſint caſus in quibus hæc regula fallit, aliam regulam ſubſtituit clariſſimus J. Campbell in Appendice ejuſdem Arithmeticæ. Elevetur bi-

binomium ad potentiam ejuſdem gradus , cujus eſt AEquatio, & ſumantur terminorum coefficientes unitate depreſſi. Quilibet coefficiens ſic diminutus dividatur per ipſummet duplicatum , & fractiones prodeuntes collocentur ſupra terminos intermedios AEquationis . Quod ſi quadratum cujuſvis termini ductum in ſupereminentem fractionem majus ſit quam rectangulum ex terminis immediate adjacentibus − rectangulo & proxime utrinque jacentibus + rectangulo & proxime ſequentibus , tunc ſignum + ponatur ſub ipſo termino ; ſecus ſignum − Et ſub primo & ultimo ponatur ſemper + . Et tot erunt radices impoſſibiles , quot erunt mutationes ſignorum .

Sit ergo æquatio

$$x^7 - 5x^6 + 15x^5 - 23x^4 + 18x^3 + 10xx - 28x + 24 = 0$$

Coefficientes terminorum binomii ad ſeptimam potentiam elevati ſunt 8. 22. *36*. *36*. 22. 8 Erunt ergo fractiones ſupereminentes ut in figura

$$\begin{matrix} & \frac{3}{7} & \frac{10}{21} & \frac{17}{35} & \frac{17}{35} & \frac{10}{21} & \frac{3}{7} & \\ x^7 & -5x^6 & +15x^5 & -23x^4 & +18x^3 & +10xa & -28x & +24 = 0 \\ + & - & + & - & + & - & + & + \end{matrix}$$

Et quia quadratum ſecundi termini ductum in ſupereminentem fractionem $\frac{3}{7}$ dat $\frac{75x^{12}}{49}$, quod minus eſt quam ſeſtangulum ex adjacentibus $15x^{12}$, ponatur ſignum − ſub ſecundo termino . At quia quadratum tertii multiplicatum per ſupereminentem fractionem $\frac{10}{21}$ majus eſt quam rectangulum ex ſe-

cun-

cundo, & quarto imminutum rectangulo ex primo & quinto, ponatur ſignum +. Et quoniam quadratum quarti termini ductum in ſupereminentem fractionem minus eſt, quum rectangulum ex adjacentibus − rectangulo ex ſecundis adjacentibus + rectangulo ex tertiis, ponatur ſignum −; & ſic procedendo erunt ſigna ut in figura in quibus cum ſex ſint mutationes, ſex quoque erunt in AEquatione data radices; quæ ſunt

$1 + \sqrt{-3}$ . $1 - \sqrt{-3}$ . $1 + \sqrt{-2}$ .
$1 - \sqrt{-2}$ . $1 + \sqrt{-1}$ . $1 - \sqrt{-1}$ .

Septima vero eſt rationalis & eſt $-1$.

Quod ſi radices inveniendæ eſſent per regulam Nevvtonianum invenirentur duæ tantum mutationes; quare duæ tantum indicarentur imaginariæ.

Demonſtrationem regulæ Campellianæ ad ipſum Auctorem remittimus, utpote quæ longo nimis, & implicato nititur obſervationum apparatui.

Interim notabimus problema hujuſmodi, quod ex regulis Arithmeticæ vix enodari poteſt, ex Geometricis facile agnoſci. Conſtructa enim AEquatione per figuras, exhibentur oculis ipſæ radices reales & & ſimul denotantur imaginariæ, quæ tamen non ſunt præſentis inſtituti.

## *DE TRANSMUTATIONIBUS ÆQUATIONUM.*

## CAPUT II.

ANtequam reſolvatur AEquatio data, expedit interdum illam tranſmutare in aliam, quæ ſit ſimplicior, & aptior; quod nunc explicandum erit. Sit ergo

PRO-

## PROBLEMA I.

*Augere vel minuere radices quantitate data.*

Sit AEquatio $x^3 - 9xx + 26u - 24 = 0$ & tranſmutanda ſit in aliam cujus radices ſuperent radices AEquationis datæ ternario numero.

Fiat & erit $y = x + 3$, &

$x = y - 3$

$$\begin{array}{lll} \text{Quare} & x^3 = & y^3 - 9yy + 27y - 27 \\ & -\ 9xx = & \quad - 9yy + 54y - 81 \\ & +\ 26x = & \qquad\quad + 26y - 78 \\ & -\ 24 = & \qquad\qquad\quad - 24 \end{array}$$

& fit nova AEquatio

$$y^3 - 18yy + 107y - 210 = 0$$

Radices AEquationis datæ ſunt 2. 3. 4. Radices novæ AEquationis ſunt 3. 6. 7.

Sit ſecundo AEquatio

$$x^3 - 12xx + 47x - 60$$

cujus radices ſunt 3. 4. 5. & oporteat invenire aliud AEquationem, cujus radices minuantur binario

Fiat $x - 2 = y$

Et erit $x = y + 2$

$$\begin{array}{lll} \text{Quare} & x^3 = & y^3 + 6yy + 12y + 8 \\ & -\ 12xx = & -\ 12yy + 14yy - 48 \\ & +\ 47x = & \qquad + 47y + 94 \\ & -\ 60 = & \qquad\qquad - 60 \end{array}$$

Et fit nova AEquatio

$$y^2 - 6yy + uy - 6 = 0$$

cujus radices ſunt 1, 2, 3. Eodem modo radices augeri poterunt vel minui quantitate quacunque *a*.

Ex quibus facile eſt agnoſcere poſſe ita augeri radices, ut quæcunque negativa tranſeat in poſitivum. Nam ſi in datæ AEquatione radices ſint − 3. − 4. − 10, augendo illas numero 20. fiet nova AEquatio, cujus radices erunt 17. 16. 20.

E contra poſſunt ita minui ut habeantur quælibet radices in AEquatione nova poſitivæ.

Ut ſi in AEquatione data ſunt radices 17. 16. 20. & minuatur numero 20. fiet nova AEquatio cujus radices erunt − 3. − 4. − 10.

## *COROLLARIUM.*

1. CUm radices augentur quæ erant poſitivæ fiunt poſitivæ majores ſed quæ erant negativæ fiunt negativæ minores, & ſæpe tranſeunt in poſitivas.

2. E contra cum minuuntur, poſitivæ decreſcunt, & poſſunt fieri negativæ, ſed negativæ augeatur.

3. Si nova AEquatio habeat ſigna alterna, ac proinde omnes radices poſitivas, id argumento eſt quantitatem aſſumptam majorem eſſe qualibet negativa radices; ipſas enim mutavit in poſitivas.

4. E contra ſi AEquatio nova habeat omnia ſigna ſimilia, ac proinde omnes radices negativas, id argumento eſt radices poſitivas AEquationis datæ imminutas fuiſſe quantitate, quæ eſt quacunque ex illis major.

## PROBLEMA II.

*Data æquatione aliam invenire; ita ut radices primæ & ſecundæ binæ binæ faciunt quantitatum datum.*

Sit data æquatio $x^3 \ldots\ldots + 4x - 8 = 0$ & invenienda ſit AEquatio, cujus radices additæ radicibus æquationis datæ faciunt binæ binæ 10.

Fiat $10 = x + y$

Et erit $x = 10 - y$

$$\text{Quare}\quad x^3 = 1000 - 300y - 30yy - y^3$$
$$+ 4x = 40 \qquad\qquad - 4yy$$
$$- 8 = - 8$$

Erit ergo $y^3 + 26yy + 300y - 1032.$

*Univerſaliter.*

Sit $x^3 \ldots\ldots - px + q = 0$

Et invenienda ſit AEquatio, in qua $a = x + y$

Erit ergo $x = a - y$

$$\text{Quare}\quad x^3 = a^3 - 3aay + 3ayy - y^3$$
$$- px = - ap + py$$
$$+ q = + q$$

$$\text{Fiat ergo}\quad y^3 = 3ayy + 3aay - a^3$$
$$- py + ap = 0$$
$$- q$$

## COROLLARIUM I.

CUm ſit $a = x + y$
Erit etiam $a - x = y$

Quare ſi quantitas $a$ ſit quacunque poſitiva radice major $y$ erit ſemper poſitiva, & fiet AEquatio, cujus omnes radices erunt poſitivæ.

## COROLLARIUM II.

SI quantitas $a$ major eſt quam quiſque coefficiens negativus AEquationis datæ, in nova AEquatione erunt omnes radices poſitivæ.

Sit enim AEquatio $x^3 - pxa - qx - r = 0$
Et fiat $a - y = x$
ut ſit nova AEquatio

$$\begin{array}{llll} y^3 - 3ayy & + 3aay & - a^3 & \\ + pyy & - 2apq & + aap & = 0 \\ & - qy & + aq & \\ & & + r & \end{array}$$

Si maximus coefficiens AEquationis datæ ponatur $p$; quoniam $a$ major eſt $p$ ex conſtructione, erit $3a$ major $p$. Quare $- 3a + p$ erit negativa quantitas. In tertio vero termino ſi loco $p$ ponatur $a - 1$, & loco $q$ $a - 2$; fiet coefficiens $3aa - 2aa + 2a + 2$; nempe poſitiva quantitas. At in homogeneo fiet $- 2a + r$. Cumque $2a$ ſit major $r$, erit conſequenter negativa quantitas.

Quare ſigna in AEquatione erunt alterna, ut proinde nonniſi ex poſitivis radicibus componetur.

CO-

## COROLLARIUM III.

DAta ergo AEquatione efformari poterit alia, cujus omnes radices ſunt poſitivæ ſi coefficiens maximus negativus augeatur unitate, & illi æquetur ſumma radicum.

Sit ſi detur $xx + x - 6 = 0$ & conſtruenda ſit nova AEquatio, cujus radices ſint omnes poſitivæ, fiat $7 - x = y$

Et erit $yy - 21y + 50 = 0$

Sic ſi detur AEquatio

$$x^3 - 5xx - 44x - 60 = 0$$

Fiat $60 - y = x$

Et erit nova AEquatio

$$y^3 - 185yy + 10576y - 197300 = 0$$

## PROBLEMA IV.

*Multiplicare, & dividere radices per quantitatem datam.*

SIt AEquatio $xx - 5x + 6 = 0$ cujus radices ſunt 2. 3. & invenienda ſit AEquatio cujus radices ſint illarum quadruplæ.

Fiat $4x = y$

Et erit $x = \frac{y}{4}$

Quare $xx = \frac{yy}{16}$

— 5

$$-5x = -\frac{5y}{4}$$
$$+6 = +6$$

Et fit nova AEquatio

$$\frac{yy}{16} - \frac{5y}{4} + 6 = 0$$

Ex qua tollendo fractiones erit

$$yy - 20y + 96 = 0$$

*Univerſaliter.*

Sit æquatio $\begin{array}{l} xx - ax + ab = 0 \\ \quad\;\; - bx \end{array}$

Cujus radices ſunt $a$, & $b$

Et multiplicandæ ſint per $m$

Erit ergo $x = \frac{y}{m}$

Et fiet AEquatio

$$\begin{array}{l} yy - amy + abmm = 0 \\ \quad\; - bmy \end{array}$$

Procedendo eadem methodo in altioribus AEquationibus emergit Regula ut multiplicentur ordine termini AEquationis datæ per poteſtates numeri multiplicantis, ita ut nempe primus terminus multiplicetur per potentiam nullam, ideſt per unitatem, ſecundus per potentiam primam, tertius per ſecundam & ſic in infinitum uſque ad homogeneum, & prodit quæſita AEquatio.

Sic ſi detur $x^4 - 4xxx + 5xx - 6x + 4 = 0$ ut quæratur AEquatio, cujus radices ſint decuplæ illarum, multiplicentur termini per 1. 10. 100. 1000. 10000. & prodibit AEquatio

y

$$y^4 - 40y^3 + 500yy - 6000y + 40000 = 0$$

Quod ſi oporteat dividere radices per quantitatem datam $m$

Sit AEquatio data $xx - ax + ab = 0$
$\qquad\qquad\qquad\quad - bx$

Et fiat $y = \frac{x}{m}$

Erit ergo $my = x$

Unde fit nova AEquatio

$$yy - \frac{ay}{m} - \frac{by}{m} + \frac{ab}{mm} = 0$$

Quod ad altiores æquationes applicando cognoſcitur terminos dividendos eſſe per poteſtates $m$ ordinatim uſque ad homogeneum ſumptas.

Sic ſi detur AEquatio

$$x^4 - 4x^3 + 6xx - 4x + 6 = 0$$

Et dividendæ ſint radices per 10, fiet nova AEquatio quæſita

$$\frac{y^4}{1.} - \frac{4y^3}{10.} + \frac{6yy}{100.} - \frac{4y}{1000.} + \frac{6}{10000.} = 0$$

## COROLLARIUM I.

Utilis eſt interdum hujuſmodi transformatio ut ad ſimpliciorem formam reducatur AEquatio.

Sit enim $x^3 - 4xx + 5x + \frac{1}{8} = 0$

Multiplicentur termini per 1. 2. 4. 8. & prodibit nova AEquatio

$y^3 - 8yy + 20y - 1 = 0$

Cujus radices ſunt duplæ radicum datæ AEquationis.

Similiter ſit $x^3 - 4x^2 + \frac{3x}{16} - 10 = 0$

Multiplicentur termini per 1. 4. 16. 64.

Et fiet AEquatio

$y^3 - 16yy + 3y - 2560 = 0$

cujus radices ſunt quadruplæ.

Neque illudit methodus ad tollendum irrationales.

Sit enim $xx + x\sqrt{2} - 6 = 0$ Multiplicentur termini per 1, $\sqrt{2}$, 2. & fiet AEquatio $yy + 2y - 12 = 0$ cujus radices ſunt ad radices AEquationis datæ ut $\sqrt{2} : 1$

Similiter ſi ſit AEquatio

$x^3 - x^2\sqrt{3} - 10x + 3\sqrt{3} = 0$

Multiplicentur termini per

1. $\sqrt{3}$. 3. $3\sqrt{3}$

Et fiet nova AEquatio

$y^3 - 3yy - 30y + 27 = 0$

cujus radices ſunt ad ſupradictas ut $\sqrt{3} : 1$.

## *COROLLARIUM II.*

POteſt quoque hac methodo inveniri AEquatio, cujus coefficiens ſit minor coefficiente homologo datæ AEquationis.

Sit enim $x^3 - 40xx + 48x - 100 = 0$

&

& quæratur nova ; in qua tertius terminus ſit minor.

Quoniam ergo 48 dividitur exacte per quadratum $16$, dividantur termini per ſeriem $1.4.16.64$. & erit nova Æquatio

$$y^3 - 10yy + 4y - \frac{100}{64} = 0$$

cujus radices ſunt quarta pars datarum.

Similiter fit $x^4 - 60xx + 36x - 270 = 0$
Et quæratur alia, in qua homogeneus ſit minor.
Dividantur termini per $1.\ 3.\ 9.\ 27.$ Et erit nova AEquatio

$$y^3 - 20yy + 4y - 10 = 0$$

## PROBLEMA V.

DAta AEquatione aliam invenire, cujus radices multiplicatæ per radices primæ AEquationis faciant quantitatem datam.

Sit $xx - 5x + 6 = 0$ & oporteat invenire novam AEquationem, cujus radicem per illas multiplicatæ faciant $12$.

Fiet $xy = 12$.
Et erit $x = \frac{12}{y}$

Unde fit nova AEquatio
$$yy - 10y + 24 = 0$$

## PROBLEMA VI.

INvenire AEquationem, cujus radices ſint reciprocæ aliarum radicum.

Sit $xx - 5x + 6 = 0$
& oporteat invenire reciprocas.

Fiat $\frac{1}{x} = y$

Et erit $x = \frac{1}{y}$

Ex quo fit $yy - \frac{5y}{6} + \frac{1}{6} = 0$

## PROBLEMA VII.

DAte AEquatione aliam conſtruere cujus radices æquantur illarum poteſtatibus.

Sit $x^4 - 6xx + 16 = 0$
& oporteat novam conſtruere, cujus radices æquantur illarum quadrato

Fiat $xx = y$
Et erit $yy - 6y + 16 = 0$

Sit ſecundo $x^6 - 8x^3 + 9 = 0$
& debeant haberi radices æquales cubo.

Fiat $x^3 = x$
Et erit $yy - 8y + 9 = 0$

## PROBLEMA VIII.

EX æquatione tollere terminos.
Sit AEquatio univerſalis
$xx - ax + b = 0$
& conſtruenda ſit alia, cui deſit ſecundus terminus.

Fiat $x = y + m$

&

& prodibit AEquatio

$$\begin{array}{lllll} yy & + 2my & + mm & & \\ & - ay & - am & = & 0 \\ & & + b & & \end{array}$$

Oportet autem tollere ſecundum terminum. Quare $2m - a = 0$

Et fit $m = \frac{a}{2}$

Si AEquatio data ſit cubica erit $m = \frac{a}{3}$; ſi biquadratica $\frac{a}{4}$, & ſic procedendo, unde Carteſii Regula prodit, ut dividatur coefficiens datæ per exponentem maximæ poteſtatis, & tali quantitate imminuantur radices.

Eodem modo deduci poteſt regula ad tollendos alios terminos.

Ut ſi detur AEquatio

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0$$

Fiat $x = y + m$

$$\text{Et erit } \begin{array}{lllll} y^3 + & 3myy & + 3mmy & + m^3 & \\ - & pyy & - 2pmy & - pmm & = 0 \\ & + & qy & + qm & \\ & & & - r & \end{array}$$

Ut tollatur tertius terminus oportet ut $3mm - 2pm + q = 0$

Quod ſi $p = 6$, $q = 9$; fiet

AEquatio $3mm - 12m + 9 = 0$

Seu $mm - 4m + 3 = 0$

Qua reſoluta invenitur $m = 3$, vel $1$

Ponendum ergo erit $x = y + 1$ vel $x = y + 3$;

& utroque modo fiet nova Æquatio tertii termini expers.

Quemadmodum autem ad tollendum ſecundum terminum reſolvenda eſt AEquatio ſimplex, & ad tertium quadratica, ita ad quartum cubica, ad quintum biquadratica & ſic procedendo ex quibus fit ut problema uſque fiat difficilius, & extra cancella ſecundi termini plerumque non educatur.

## *DE RESOLUTIONE GENERALI ÆQUATIONUM SECUNDI GRADUS.*

## CAPUT III.

CUm homogenei diviſores vel poſitive, vel negative ſumpti, & loco incognitæ ſubſtituti terminos AEquationis ad nihilum non redigunt, id argumento eſt radices non eſſe rationales: Ad alias ergo neceſſe fuit animum intendere methodos, eaſque generales, quibus tam rationales, quam irrationales radices extrahi poſſent, & tam reales agnoſcerentur, quam imaginariæ.

Quod nunc explicandum, & primo de quadraticis.

Omnes autem AEquationes quadraticæ ad quatuor hujuſce ſpecies reducuntur.

I. $xx - 2ax + b = 0$

II. $xx - 2ax - b = 0$

III. $xx + 2ax + b = 0$

IV. $xx + 2ax - b = 0$

ad quarum radices extrahendas una & eadem inſervit methodus.

Sit ergo prima AEquatio

$$xx - 2ax + b = 0$$

Et

Et erit $xx - 2ax = b$

Et quoniam quadratum binomii conſtat ex quadrato primi termini, & quadrato ſecundi, dupleque rectangulo primi, & ſecundi, addatur utrique membro quadratum $aa$ ex ſemicoefficiente $a$, &c. fiet $xx - 2ax + aa = aa - b$

Cumque in primo AEquationis membro detur quadratum perfectum ex conſtructione, cujus radix eſt $x - a$, extracta utrobique quadrata radice,

Erit $x - a = \pm \sqrt{aa - b}$

Quare $x = a \pm \sqrt{aa - b}$

Eodem modo determinatur valor radicum in aliis formulis & erunt

I. $x = a \pm \sqrt{aa - b}$

II. $x = a \pm \sqrt{aa + b}$

III. $x = - a \pm \sqrt{aa - b}$

IV. $x = - a \pm \sqrt{aa + b}$

## *COROLLARIUM I.*

EX hujuſmodi formulis agnoſcitur generaliter exprimi radices ſive ſint reales, ſive imaginariæ, ſive rationales, ſive irrationales.

Sit enim quantitas $aa - b$ in prima formula quadratum perfectum, erit tunc radix rationalis. At ſi quadratum non ſit perfectum, erit irrationalis.

Rurſus ſit $aa$ major $b$, & radix erit realis; at ſi $aa$ ſit minor $b$, tum radix erit imaginaria.

Idem eſto de formula tertia. Sed cum in ſecunda, & quarta $aa + b$ ſemper ſit poſitiva quanti-

titas, radices æquationum ad hujuſcemodi formulas pertinentium, numquam erunt imaginariæ, ſed ſemper reales.

Sit ergo AEquatio $xx - 5x + 6$ quæ ad primam reducitur ſpeciem, & erit $aa = 5$, $b = 6$

Quare $x = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} - 6}$

Erit ergo $x$ vel 2. vel 3.

At ſi habeatur $xx - 5x + 8 = 0$

Tum $x = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} - 8}$

quare radices erunt imaginariæ.

Sit ſecundo loco AEquatio

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

quæ tertiæ eſt ſpeciei, & erit

$2a = 5$, $b = 6$

Quare $x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6}$

erunt ergo radices $-2$. $-3$. quod ſi loco 6 ponatur 8 erunt radices imaginariæ.

Sit tertio $xx - 8x - 10 = 0$ quæ ad ſecundam formulam ſpectat; & erit $2a = 8$, $b = 10$

Quare $x = \pm \sqrt{26} + 4$ & erunt irrationales. Sed ſi in homogeneo inveniretur $-20$; tum radices eſſent rationales, nempe 10. vel $-2$.

Sit denique $xx + 8x - 10 = 0$ quæ ad quartam formulam pertinet, & erit $2a = 8$, $b = 10$

Quare $x = \pm \sqrt{26} - 4$ & erunt radices irrationales.

Quod ſi loco $-10$ ſit homogeneus $-20$, tum fient rationales, & erunt vel 2. vel $-10$.

CO-

## COROLLARIUM II.

Methodus reſolvendi æquationes quadraticas ducit interdum ad reſolutionem Æquationum altiorum, quæ ad quadraticas reducuntur.

Sit enim $x^4 - 5xx + 6 = 0$
Si fiat $xx = y$
Erit nova Æquatio
$yy - 5y + 6 = 0$
Cujus radices ſunt 2. vel 3.
Quoniam ergo $xx = y$
Erit $x = \pm\sqrt{y}$.
Quare datæ Æquationis radices erunt
$\pm\sqrt{2}$ & $\pm\sqrt{3}$.

Eodem modo ſi ſit $x^6 - 5x^3 + 6 \; 0$
Fiat $x^3 = y$
Et erit $yy - 5y + 6 = 0$
Cujus radices ſunt 2. 3

Erit ergo $x^3 = 2$, & $x^3 = 3$

Quare $x = \sqrt[3]{2}$; & $x = \sqrt[3]{3}$

Et quoniam $\sqrt[3]{2}$ triplum ut ſuo loco videbimus valorem habet, & triplum pariter $\sqrt[3]{3}$ ſex quoque determinabuntur propoſitæ Æquationis radices.

Hujuſcemodi Æquationes, quæ ad quadraticam reducuntur, *ſecundi gradus Derivativæ* vocantur; & omnes ſub hac formula generali contineri poſſunt

$x^{2m} + px^m + q = 0$

# DE ÆQUATIONIBUS CUBICIS.

## CAPUT IV.

*Reſolvere Æquationes Cubicas Puras.*

### PROBLEMA I.

ÆQuationes Cubicæ *Puræ* dicuntur, ſi ſecundo, & tertio termino carent, & ad duas ſpecies reducuntur.

1. $x^3 - p = 0$

2. $x^3 + p = 0$

quarum utraque eodem methodo reſolvetur.

Quoniam enim in prima

$x^3 - p = 0$

Erit $x^3 = p$

Et conſequenter $x = \sqrt[3]{p}$

Sic in ſecunda $x = \sqrt[3]{-p}$

Sed quoniam Æquationis cujuſcunque cubicæ tres ſunt radices & unica tali modo exponitur, oportet & reliquas invenire.

Ponatur ergo $p = a^3$, & erit

$x^3 - a^3 = 0$

Quare $x = a$

Diviſa ergo Æquatione cubica per $x + a$; prodibit æquatio quadratica.

$$xx + ax + aa = 0$$

Cujus radices ſunt

$$x = +\sqrt{-\frac{3aa}{4}} - \frac{a}{2}$$

$$x = -\sqrt{-\frac{3aa}{4}} - \frac{a}{2}$$

quarum utraque eſt imaginaria.

Eodem modo radices alterius Æquationis invenientur

$$x = a$$

$$x = +\frac{1}{2}\sqrt{-3aa} + \frac{a}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{-3aa} + \frac{a}{2}$$

quarum prima eſt realis, reliquæ imaginariæ.

Ponatur nunc $x = 1$, cujus radices quærantur, & erit $a = 1$

Quare radices erunt

$$x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{-3} + \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{-3} + \frac{1}{2}$$

*Reſolvere Æquationes Cubicas, ſecundo tantum termino carentes, quarum aliqua radix eſt Rationalis.*

## PROBLEMA II.

QUælibet Æquatio Cubica, cui deeſt ſecundus terminus ad quatuor ſpecies reduci poteſt,

$$1.\ x^3 + 3px + 2q = 0$$

$$2.\ x^3 + 3px - 2q = 0$$

$$3.\ x^3 - 3px - 2q = 0$$

$$4.\ x^3 - 3px + 2q = 0$$

quæ tamen compendii gratia ad unam poſſunt reduci

$$x^3 + 2px + 2q = 0$$

Ut autem reſolvatur hujuſmodi Æquatio illud primo advertendum, quod in Æquatione Cubica, cui deeſt ſecundus terminus vel duæ radices ſunt poſitivæ, & tertia, negativa æquali illarum ſummæ, vel duæ ſunt negativæ, & tertia poſitiva æqualis pariter illarum ſummæ.

2. Duæ radices ſive ſint poſitivæ ſive negativæ, poſſunt eſſe æquales, vel inæquales.

3. Vel omnes ſunt reales, vel una tantum realis, & reliquæ imaginariæ.

4. Quæ reales ſunt vel ſunt rationales, vel irrationales, quæ omnia erunt determinanda.

Et primo ponatur duas Æquationis propoſitæ radices eſſe poſitivas, & tertiam, ſive earum ſummam eſſe negativam.

Ponatur ergo prima radix $= a + b$, ſecunda $= a - b$ ( ſupponendo $a$ majorem quam $b$ ), & erit tertia $= - 2a$. Erunt ergo Æquationes ſim-

ſimplices $x - a - b = 0$

$x - a + b = 0$, $x + 2a = 0$

quæ inter ſe multiplicatæ dant Æquationem Cubicam

$$\text{A} \quad \begin{matrix} x^3 - 3aax + 2a^3 = 0 \\ - bbx - 2abb \end{matrix}$$

Sint ſecundo loco duæ negativæ & tertia illa æqualis poſitiva. Quare æquationes componentes erunt $x + a + b = 0$, $x + a - b = 0$ $x - 2a = 0$, & fit Æquatio

$$\text{B} \quad \begin{matrix} x^3 - 3aax - 2a^3 = 0 \\ - bbx + 2aab \end{matrix}$$

ubi notari poteſt in utraque Æquatione tertium terminum eſſe ſemper negativum; ex quo inferri poteſt quod ſi detur Æquatio Cubica, cui deſit ſecundus terminus, & tertius vel ſit poſitivus vel zero, radices ejus non erunt omnes reales, ſed una realis erit, & reliquæ imaginariæ.

Si coefficientes Æquationis A cum coefficientibus Æquationis generalis $x^3 - 3px + 2q = 0$.

Fit $3p = 3aa + bb$

$2q = 2a^3 - 2abb$

Quare $p = aa + \frac{bb}{3}$

$q = a^3 - abb$

Ergo elevando primam ad cubum

$$p^3 = a^6 + a^4bb + aab^4 + \frac{b^6}{27}$$

Et elevando ſecundam ad quadratum

$$qq = a^6 - 2a^4bb + aab^4$$

Ergo ſubtrahendo erit

$$p^3 - qq = 3a^3bb - \frac{2aab^4}{3} + \frac{b^6}{27}$$

Quæ æquatio invenitur quoque ex æquatione B. Ex quibus fluunt ſequentes obſervationes.

1. Ponatur enim primo omnes radices eſſe reales, & inæquales ut poſitum eſt in conſtructione. Tumque ſecundum membrum Æquationis erit poſitiva quantitas ( ponitur enim $a$ major $b$ ) Quare etiam $p^3 - qq$ erit poſitiva quantitas; nempe cubus ex triente coefficientis erit major quadrato ex ſemiſſe homogenei.

2. Ergo ſi $p^3$ eſt minor $qq$ non erunt omnes radices reales, ſed duæ erunt imaginariæ.

3. Quod ſi ponantur duæ radices æquales, tum quantitas $b$ fit zero; quare ſecundum membrum Æquationis fit pariter zero.

Erit ergo $p^3 - qq = 0$, & fit $p^3 = qq$

Igitur ſi in Æquatione aliqua cubica, cui deſit ſecundus terminus $p^3 = qq$; erunt in ea duæ radices reales.

*Poſitis duabus radicibus æqualibus invenire radices.*

Cum radices ponantur æquales erit $b = 0$; Quare coefficientes ſunt $3aa = 3p$

Et $a^3 = q$

Erit

Erit ergo $aa = p$

Et dividendo $\frac{a^3}{aa} = \frac{q}{p} = a$

Unde prodit ſequens regula ad educendam radicem æqualem, ut ſemiſſis homogenei dividatur per trientem coefficientis.

*Poſitis radicibus inæqualibus quarum aliqua eſt rationalis invenire radices.*

1. Si ex $4aa$ quadrato radicis $2a$ ſubtrahatur coefficiens $3aa + bb$, fit reſiduum $aa - bb$, At ſi per hoc reſiduum dividatur homogeneum $2a^3 - 2abb$; prodit $2a$, quæ una eſt ex radicibus.

2. Rurſus ſi quadratum radicis $a + b$; nempe nempe $aa + 2ab + bb$ ſubtrahatur ex coefficiente $3aa + bb$, fit reſiduum $2aa + 2ab$.

At ſi per hoc reſiduum dividatur homogeneum $2a^3 - 2abb$: prodit $a - b$ quæ eſt una ex radicibus.

Ex quibus duæ diverſæ regulæ oriuntur ad inveniendas radices ſi quæ ſint rationales.

Prima ut coefficiens tertii termini ſubtrahatur ex aliquo quadrato majori; & ſi reſiduum metitur homogeneum, quotus erit quæſita radix.

Altera ut ex coefficiente tertii termini ſubtrahatur aliquod quadratum, & ſi reſiduum metitur homogeneum, quotus erit quæſita radix.

Quæ nunc exemplis ſunt declaranda.

Sit ergo primo $x^3 - 7x + 6 = 0$

Et quoniam $p^3$ eſt major $qq$ omnes radices erunt reales, & inæquales; cumque homogeneum ſit po-

ſitivum, erunt duæ radices poſitivæ, tertia vero negativa.

Si per primam regulam ex quadrato 9 ſubtrahatur 7 fiet reſiduum 2, per quod diviſo 6, prodit quotus 3; Erit ergo 3 radix negativa; nempe $-3$.

Quod ſi quadratum 4 ſubtrahatur ex 7, & per reſiduum 2 dividatur 6; quotus 2 erit una ex poſitivis.

Sit ſecundo $x^3 - 19x + 30 = 0$

Et quoniam $p^3$ eſt major $qq$ omnes radices erunt reales, & inæquales, & duæ erunt poſitivæ, tertia negativa.

Subtrahatur per primam regulam 19 a 25; & per reſiduum 6 dividatur 30, & quotus 5 erit negativa radix.

Vel quadratum 9 per ſecundam regulam ſubtrahatur a 19 & per reſiduum 10 dividatur 30, & quotus 3 erit una ex radicibus. Ita fiet ſi ex 19 ſubtrahatur 4 nam fit reſiduum 15, per quod diviſo 30 fit quotus 2; quæ una eſt ex radicibus.

At ſi ſubtrahatur 16 fit reſiduum 3; per quod diviſo 3, fit quotus 10; qui cum non ſit radix; confugiendum erit ad aliud quadratum, puta 16, vel 9.

Sit tertio $x^3 - 15x + 4$

Subtracto 15 a quadrato 16 fit reſiduum 1; per quod diviſo 4 fit quotus 4; nempe quæſita radix negativa. Diviſa ergo Æquatione Cubica per $x + 4$ prodit Æquatio quadratica $xx - 4x + 1 = 0$ qua reſoluta fiunt radices $2 \pm \sqrt{3}$. Ergo radices Æquationis cubicæ erunt 1; $2 + \sqrt{3}$; $2 - \sqrt{3}$.

## SCHOLION.

CUm per primam regulam quæritur maxima radix, neque prodit exactus homogenei diviſor, id argumento eſt, maximam radicem eſſe irrationalem.

Et ſi quæratur una ex minoribus per ſecundam regulam, neque prodeat exactus diviſor, tum argumento eſt minores eſſe irrationales.

### *Reſolvere Æquationes quaſcunque Cubicas Prima Methodus.*

SIt Æquatio generalis

$$x^3 + 3px + 2q = 0$$

ad quam reducantur omnes ſecundo termino carentes.

Fiat $x = y + a$, & erit

$$x^3 = y^3 + 3aay + 3ayy + a^3$$

Fiat $3aay + 3ayy = 3px$

Quare $ayy + aay = px$

Et quoniam ex hypotheſi $y + a = x$

Erit etiam $ayy + aay = axy$

Quare $axy = px$.

Et fit $a = \frac{p}{y}$

Sit ergo rurſus $x = y + \frac{p}{y}$

Et factis ſubſtitutionibus emergit Æquatio

$$y^6 + 2qy^3 = p^3$$

quæ

quæ eſt derivata ſecundi gradus, quæ reſoluta ſit

$$y = \sqrt[3]{-q+\sqrt{qq+p^3}}$$

Et extracta radice cubica ſit

$$y = \sqrt[3]{-q+\sqrt{qq+p^3}}$$

Erit ergo $x = \sqrt[3]{-q+\sqrt{qq+p^3}} \quad \frac{+p}{\sqrt[3]{-q+\sqrt{qq+p^3}}}$

qui Generalis eſt Canon pro quacunque Æquatione cubica, cui deſit ſecundus terminus.

Sit ergo $x^3 \ldots + 24x + 8 = 0$.
Cujus ſit extrahenda radix
Erit ergo $3p = 24$, $2q = 8$

Quare $x = \sqrt{-4+\sqrt{528}} \quad \frac{+8}{\sqrt[3]{-4\sqrt{528}}}$

Sit ſecundo $x^3 - yx + 10 = 0$
Erit ergo $p = -3$, $q = 4$

Et fiet $x = \sqrt{-4+\sqrt{53}} \quad \frac{\quad}{\sqrt[3]{-4+\sqrt{53}}}$

Hac methodo uſi ſunt Arabes, & Itali.

*Altera methodus.*

Sit Æquatio generalis

$$x^3 - 3px - 2q = 0$$

Fiat

Fiat $x = a + b$

Erit $x^3 = a^3 + 3aab + 3abb + b^3$

Sive $x^3 = a^3 + 3abx + b^3$

Quare $x^3 - 3abx - a^3 - b^3 = 0$

Quæ Æquatio ejuſdem eſt formæ ac propoſita.
Comparando ergo coefficientes
Fiet primo $p = ab$

Secundo $2q = a^3 + b^3$

Quare $2a^3 q = a^6 + a^3 b^3 = a^6 + p^3$

Erit ergo Æquatio $a^6 - 2qa^3 + p^3 = 0$

Quæ cum ſit derivativa ſecundi gradus facile poterit reſolvi, & fiet

$a^3 = q + \sqrt{qq - p^3}$

Quare $a = \sqrt[3]{q + \sqrt{qq - p^3}}$

Eodem modo cum ſit $2q = a^3 + b^3$

Erit $b^3 = 2q - a^3$

Ideſt $b^3 = q - \sqrt{qq - p^3}$

Quare $b = \sqrt[3]{q - \sqrt{qq - p^3}}$

Cum igitur $x = a + b$

Erit $x = \sqrt[3]{q + \sqrt{qq - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{qq - p^3}}$

qui eſt generalis Canon pro quacunque Æquatione cubica cui deſit ſecundus terminus.

Sed cum quælibet radix cubica alicujus quantitatis triplicem habeat valorem & exempli gratia ra-

dix cubica $m^3$; ſeu $1 \times m^3$,

Sit triplex; nempe

$$1 \times m$$

$$\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times m$$

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{3} \times m$$

ideo erit triplex valor quantitatis $a$ & erit

$$a = \sqrt[3]{q+\sqrt{qq-p^3}}.$$

$$a = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{q+\sqrt{qq-p^3}}$$

$$a = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{q+\sqrt{qq-p^3}}$$

Triplex ſimiliter erit valor $b$, & erit

$$b = \sqrt[3]{q-\sqrt{qq-p^3}}$$

$$b = -1+\sqrt{-3} \times \sqrt[3]{q-\sqrt{qq-p^3}}$$

$$b = -1-\sqrt{-3} \times \sqrt[3]{q-\sqrt{qq-p^3}}$$

Quoniam ergo $x = a + b$

Erit quoque pro triplici valore

$$x = \sqrt[3]{q+\sqrt{qq-p^3}} + \sqrt[3]{q-\sqrt{qq-p^3}}$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{q+\sqrt{qq-p^3}} \; \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{q-\sqrt{qq-p^3}}$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{q+\sqrt{qq-p^3}} \; \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{q-\sqrt{qq-p^3}}$$

qui ſunt Canones generales ad exprimendas ſingulas radices cujuſcumque Æquationis Cubicæ.

Sit exempli gratia $x^3 - 12x - 18 = 0$

Cujus radices ſint extrahendæ. Comparatis coefficientibus fiet $p = 4$ $q = 9$; erit ergo

$$x = \sqrt[3]{9+\sqrt{17}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{17}}$$

Eodem modo per duos alios Canones educentur reliquæ.

Sit ſecundo loco $x^3 + 12x + 18 = 0$

Et erit $p = -4$, $q = -9$

Quare $x = \sqrt[3]{-9+\sqrt{17}} + \sqrt[3]{-9-\sqrt{17}}$

Sit tertio $x^3 + 90x - 16 = 0$

Et erit $p = -30$, $q = 8$

Quare $x = \sqrt[3]{8+\sqrt{-2636}} + \sqrt[3]{8-\sqrt{-2636}}$

## *S C H O L I O N.*

ILlud tamen notandum, quod majoris momenti eſt ad hujus ſcientiæ intelligentiam, hujuſmodi Canones licet exactiſſime ad quoſcumque caſus ſe extendant, ambigue tamen radices exponere, tum cum omnes radices ſunt reales. Cum enim, ut ſuo loco notavimus, ſit in eo caſu $p^3$ major $qq$, erit ergo $\sqrt{qq-p^3}$ quantitas imaginaria ac proinde radices, quæ ex Canone exhibendæ eſſent reales, exhibentur imaginariæ.

Ita ſi ſit Æquatio,

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

Cujus radices ſunt 1. 2. — 8. exhibentur tanquam imaginariæ a Canone. Eſt enim $q = 3$ $p = \frac{7}{3}$

Quare radices erunt

$$x = \sqrt{3 + \sqrt{-\tfrac{100}{27}}} + \sqrt{3 - \sqrt{-\tfrac{100}{27}}}$$

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{-3} \times \sqrt{3 + \sqrt{-\tfrac{100}{27}}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3} \times \sqrt{3 - \sqrt{-\tfrac{100}{27}}}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{-3} \times \sqrt{3 + \sqrt{-\tfrac{100}{27}}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3} \times \sqrt{3 - \sqrt{-\tfrac{100}{27}}}$$

quarum ſingulæ ſunt ſub forma imaginaria, qui quidem non exiguus videtur eſſe defectus Canonis.

Cui difficultati, ut obviam irent ſolertiſſimi viri, videbatur enim ſcientia in hoc caſu deficere, conati ſunt invenire viam ut ad quoslibet caſus Canonem ſi fieri poteſt extenderent, ex imaginaria formula quantitates reales educendo, quod factum eſt per extractionem radicis cubicæ ex binomiis imaginariis, ut nunc erit explicandum.

Sit enim binomium imaginarium $2 + \sqrt{-121}$, cujus extrahenda ſit radix cubica.

Sit illa $a + \sqrt{-b}$

Eritque ejus cubus

$$a^3 - 3ab + \sqrt{-9a^4 b} + \sqrt{-b^3} = 2 + \sqrt{-121}$$

Æqua-

Æquetur pars rationalis unius membri parti rationali alterius, & erit $a^3 - 3ab = 2$

Æquetur inde pars irrationalis irrationali, & erit

$$\sqrt{-9a^4b} + \sqrt{-b^3} = \sqrt{-121}$$

Quadrando primam Æquationem erit

$$a^6 - 6a^4b + 9aabb = 4$$

Et quadrando ſecundam

$$9a^4b - 6aabb + b^3 = 121$$

Addendo utramque fit

$$a^6 + 3a^4b + 3aabb + b^3 = 125$$

Cumque ſint cubi perfecti extracta radice cubica erit $aa + b = 5$

Unde fit $b = 5 - aa$

Cum ergo ſit $aa - 3ab = 2$

Subſtituendo fit $4a^3 - 15a = 2$

Cujus Æquationis radix eſt 2

Ergo $b = 1$. Radix ergo quæſita erit $2 + \sqrt{-1}$

Similiter ſi ſit alterum binomium imaginarium $2 - \sqrt{-121}$ invenietur ejus radis cubica $2 - \sqrt{-1}$. Quare ſi ex Canone habeatur

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

poterit per hunc methodum explicari valor ejus in rationalibus, & erit $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$

Sit nunc ex Canone

$$x = \sqrt[3]{-3-\sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{-3+\sqrt{-\frac{100}{27}}}$$

Edu-

Educatur radix cubica ex utroque binomio ſurdo, & earum ſumma erit quæſita radix.

Fiat ergo $-a-\sqrt{-b} = \sqrt{-3-\sqrt{-\frac{100}{27}}}$

& erit

$$-a^3+\sqrt{9a^4b}+3ab+\sqrt{-b^3}=-\sqrt{-\frac{100}{27}}$$

Sit $-a^3+3ab=-3$.

$$\sqrt{-9a^4b}+\sqrt{-b^3}=\sqrt{-\frac{100}{27}}$$

Et quadrando utro biqueerit

$$-a^6-6a^4b+9aabb=9$$

$$-9a^4b+6aabb-b^3=-100$$

& ſubtrahendo primam a ſecunda erit

$$a^6+3a^4b+3aab+b^3=\frac{343}{27}$$

& extracta utrobique radiee

$$aa+b=\frac{7}{3}$$

Quare $b=\frac{7}{3}-aa$

Et quoniam $-a^3+3ab=-3$

ſubſtituto valore $b$, ſit $4a^3-7a-3=0$

Cujus radix eſt $\frac{3}{2}$

Erit

Erit ergo $a = \frac{3}{2}$; $b = \frac{1}{12}$

Quare prima pars quæſitæ radicis eſt

$-\frac{3}{2} - \sqrt{-\frac{1}{12}}$

Altera pars $-\frac{3}{2} + \sqrt{-\frac{1}{12}}$

quarum ſumma $= -3$

## COROLLARIUM.

Ponatur $a + \sqrt{b}$ eſſe radix cubica binomii ſurdi $q + \sqrt{qq - p^3}$ fiet Canon ſimplicior, & radices erunt.

Prima $2a$

Secunda $-a + \sqrt{-3b}$

Tertia $-a - \sqrt{-3b}$

## EXEMPLUM I.

Sit $x^3 - 7x - 6 = 0$

Erit $p = 7$; $q = 3$

Binomium ſurdum $3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}$

Cujus radix cubica eſt

$-1 + \sqrt{-4}$. Quare $a = -1$ $b = -\frac{4}{3}$

Erunt ergo radices

Prima $-2$

Secunda $3$

Tertia $-1$

Quod

Quod ſi ejuſdem binomii radix cubica ponatur $\frac{3}{2} + \sqrt{-\frac{1}{12}}$, tres enim agnoſcit, erit $a = \frac{3}{2}$ $b = -\frac{25}{12}$, & eædem invenientur radices.

## EXEMPLUM II.

Sit $x^3 - 100996x - 12063360 = 1$

Erit $p = \frac{100996}{3}$, $q = 6031680$

Binomium ſurdum erit

$$6031680 + \sqrt{\frac{47887175043136}{27}}$$

Cujus radix cubica eſt $183 + \sqrt{-\frac{529}{3}}$. Erit ergo

$a = 183$, $b = -\frac{529}{3}$

Erunt ergo radices

Prima 183

Secunda $= -183 + \sqrt{529} = - - 160$

Tertia $- 183 - \sqrt{529} = - 206$

## SCHOLION.

HAEc ſunt quæ ad uſum perfectum Canonis addidere viri doctiſſimi. Præclarum quidem inventum, at præclarius ſi eadem felicitate, qua rationales quantitates ex ænigmate imaginario evolvit, evolveret etiam irrationales, quod quidem fieri non poteſt; Quare licet ad alios omnes caſus ſe ex-

extendat Canon, ubi tamen tres dantur in AEquatione radices reales Irrationales, Canon deficit; vocaturque, *Caſus Irreſolutus*.

## DE ÆQUATIONIBUS BIQUADRATICIS.

## CAPUT V.

*Biquadraticas Æquationes reſolvere.*

REſolutiones Æquationum Biquadraticarum ad reſolutiones Cubicarum more Carteſii reducantur.

Sit $x^4 + pxx + qx + r = 0$
quæ Æquatio omnes biquadraticas repræſentet ſecundo termino carentes.

Concipiatur hæc generari ex duabus Æquationibus $xx + ax + b = 0$

Et $xx - ax + c = 0$

Si autem hæc multiplicentur inter ſe, faciunt

$$\begin{aligned} x^4 - aaxx &- abx + bc = 0 \\ + bxx &+ acx \\ + cxx & \end{aligned}$$

Quæ Æquatio eadem erit atque propoſita.

Comparando ergo coefficientes, fit

Primo $-aa + b + c = p$

Secundo $-ab + ac = q$

Tertio $bc = r$

Quare per primam $b + c = aa + p$

Et multiplicando per $a$, $ab + ac = a^3 + ap$

Sed per ſecundam $ac - ab = q$

 Ergo

Ergo addendo $2ac = a^3 + ap + q$

Et ſubtrahendo $2ab = ap + a^3 - q$

Multiplicatis ergo hujuſmodi Æquationibus

Erit $4aabc = aapp + 2pa^4 + a^6 - qq$

Et quoniam $bc = r$, fiet tandem

$$4aar = aapp + 2pa^4 + a^6 - qq$$

nempe $a^6 + 2pa^4 + ppaa - qq = 0$
$\quad - 4raa$

quæ eſt Æquatio derivativa ex Cubica.

Reſoluta igitur hac Æquatione dabitur valor $a$, quo dato datur & $b$, & $c$.

Cum enim $- aa + b + c = p$

Erit $b + c = aa + p$

Ergo $ab + ac = a^3 + ap$

Sed eſt etiam $ac - ab = q$

Quare addendo fiet

$$2ac = a^3 + ap + q$$

Et ſubtrahendo $2ab = a^3 + ap - q$

Unde fit $c = \frac{a^3 + ap + q}{2a}$

Et $b = \frac{a^3 + ap - q}{2a}$

Dabuntur ergo Æquationes componentes, cujus radices ſunt eædem ac radices propoſitæ.

Erunt ergo radices propoſitæ

Pri-

Prima $+\sqrt{\frac{aa}{4}-b}-\frac{a}{2}$

Secunda $-\sqrt{\frac{aa}{4}-b}-\frac{a}{2}$

Tertia $+\sqrt{\frac{aa}{4}-c}+\frac{a}{2}$

Quarta $-\sqrt{\frac{aa}{4}-c}-\frac{a}{2}$

Oportet autem determinare quantitatem $a$.

*EXEMPLUM I.*

Sit Æquatio $x^4 - 12xx + 12x - 3 = 0$
Erit ergo $p = -12$, $q = 12$, $r = -3$
quibus valoribus ſubſtitutis in Æquatione cubica generali fit

$$a^6 - 24a^4 + 156aa - 144 = 0$$

quæ reſpondet datæ Æquationi ; in qua invenitur $aa = 12$ erit ergo $a = \sqrt{12}$ ; qua determinata fit juxta præſcripta $b = \sqrt{3}$, $c = -\sqrt{3}$

Ergo Æquationes componentes erunt

$$xx + x\sqrt{12} - \sqrt{3} = 0$$
$$xx - x\sqrt{12} - \sqrt{3} = 0$$

Radices primæ Æquationis ſunt

$$+\sqrt{3+\sqrt{3}} + \sqrt{3}$$
$$-\sqrt{3+\sqrt{3}} + \sqrt{3}$$

Radices alterius

$+\sqrt{3-\sqrt{3}} - \sqrt{3}$

$-\sqrt{3-\sqrt{3}} - \sqrt{3}$

## EXEMPLUM II.

Sit $x - 86xx + 600x - 851 = 0$
Erit cubica reſpondens

$a^6 - 171a^4 + 10800aa - 360000 = 0$

In qua $aa = 100$, & $a = 10$
Erit ergo $b = -23$, $c = 37$
Quare componentes fient

$xx + 10x - 23 = 0$

$xx - 10x + 37 = 0$

Radices primæ ſunt

$+\sqrt{48} - 5$

$-\sqrt{48} - 5$

Radices alterius ſunt

$5 + \sqrt{-12}$

$5 - \sqrt{-12}$

Quæ ſunt eædem ac radices propoſitæ, duæ nempe reales, & duæ imaginariæ.

## EXEMPLUM III.

Sit $x^4 - \frac{107xx}{2} + \frac{117x}{4} - \frac{29897}{16} = 0$

Erit cubica reſpondens

$a^6 - 107a^4 + \frac{7929aa}{16} - \frac{13689}{16} = 0$

Ut

Ut reſolvatur hæc Æquatio juxta methodos præſcriptas, comparentur coefficientes, & erit

$$p = \frac{107}{2},\quad q = \frac{22009}{144}\quad r = \frac{2903923}{1728}$$

Quare Binomium ſurdum ſit

$$\frac{2903923}{1728} + - \sqrt{\frac{11940075}{16}}$$

Cujus radix cubica eſt $-\frac{53}{12} + \sqrt{-\frac{400}{3}}$

Fiet igitur ex Canone

$$aa = 9\text{, vel } \frac{169}{4}\text{, vel } \frac{9}{4}$$

Et conſequenter valores $a$ erunt ſex; nempe

$$\pm 3 \quad \pm \frac{13}{2} \quad \pm \frac{3}{2}$$

Quorum ſinguli ad educendas radices quæſitas inſerviunt.

Ponatur ergo $a = 3$, determinantur Æquationes componentes, & fiunt radices quæſitæ

$$4. \quad -6. \quad 13. \quad -3.$$

## *COROLLARIUM.*

1. EX his intelligitur quod ſi detur Æquatio ſecundo termino gaudens, oportebit ſecundum hanc methodum reducere illam ad Æquationem ejuſdem termini expertem.

Licet enim facile poſſit tranſmutari Canon pro quacunque Æquationi, cum tamen ſit magis compoſitus, conſultius eſt adhibere ſimpliciorem.

2. Si quantitas $a$ prodeat rationalis, erunt etiam $b$, & $c$ rationales. Quare poterit Æquatio biquadra-

tica

tica reduci ad quadraticam, & ejus radices exprimentur ſemper radicali quadrato.

Secus ſi $a$ prodeat irrationalis tumque radices quæſitæ non erunt immunes a radice cubica.

3. Si æquatio propoſita præter ſecundo termino careat etiam quarto, tum conſiderari poteſt ut quadratica; & juxta methodum quadraticarum reſolvi.

Sic ſi detur $x^4 \ldots + qxx \ldots - r = 0$

Fiat $z = xx$

Et fiet Æquatio $zz + qz - r = 0$

Cujus radices erunt

$$+ \sqrt{rr + \frac{qq}{4}} - \frac{q}{2}$$

$$- \sqrt{rr + \frac{qq}{4}} - \frac{q}{2}$$

Cumque $x = \pm \sqrt{z}$

Erunt radices quæſitæ

$$\pm \sqrt{\sqrt{rr + \frac{qq}{4}} - \frac{q}{2}}$$

$$\pm \sqrt{-\sqrt{rr + \frac{qq}{4}} - \frac{q}{2}}$$

IV. Si demum omnibus careat intermediis, tum dicitur *pura*, & facile eſt ipſam reſolvere per extractionem radicis quadroquadratæ

Ut ſi fiat $x^4 + q = 0$

Erit

Erit enim $x = -q$
Quare $xx = \pm\sqrt{-q}$
Et $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{-q}}$

## *S C H O L I O N.*

INterim notandum, quod ſi Æquatio biquadratica omnes radices reales habeat, etiam in cubica quæ ipſi reſpondet, omnes erunt radices reales, quare in caſum incurritur irreſolutum.

Quod ſi illa duas habeat radices reales, & duas imaginarias erunt quoque duæ imaginariæ in cubica, quæ facile proinde per Canonem reſolvitur.

Denique ſi omnes in biquadratica ſint imaginariæ, omnes in cubica fiunt reales, & rurſus in caſum irreſolutum incurritur.

Sed cum radices reales, & rationales poſſint ſemper ex Æquatione cubica educi, vel per methodum diviſorum, vel per extractionem radicis Binomii ſurdi, ut explicavimus; poterit ſemper biquadratica Æquatio, etiam cum omnes habet imaginarias, vel omnes reales, exacte reſolvi. At ſi in cubica ſint irrationales, quoniam neque per methodum diviſorum, neque per reſolutionem binomii ſurdi exactæ radices poſſunt educi, & tantum proximæ, fiet ut in eo caſu proximæ ſolum haberi poſſint AEquationis propoſitæ radices.

## *METHODUS RESOLVENDI ALTIORES ÆQUATIONES.*

### CAPUT VI.

Generalis methodus in eo poſita ut adſumantur AEquationes ſimplices quarum radices ſint ejuſdem ſpeciei ac radices æquationis datæ; & compoſita ex illis AEquatio comparetur cum data, ut determinentur coefficientes aſſumpti, ex qua determinatione oritur ſemper AEquatio inferior data.

Sit primo AEquatio generalis

$$x^4 + 4pxx + 8qx + 4r = 0$$

Cujus duæ ſint radices reales, & duæ imaginariæ

Sint $x - a - b = 0$

Et $x - a + b = 0$

Quæ repræſentant duas reales.

Sitque $x + a + \sqrt{-cc} = 0$

$x + a - \sqrt{-cc}$

Quæ repræſentant duas imaginarias & earum multiplicatione fiet

$$\left.\begin{array}{llll} x^4 & -\ 2aaxx & -\ 2abx & +\ a^4 \\ & -\ bb\,xx & -\ 2acx & -\ aabb \\ & +\ cc\,xx & & +\ aacc \\ & & & -\ bbcc \end{array}\right\} = 0$$

Quæ erit eadem AEquatio atque propoſita.

Tum comparatis coefficientibus fiet

$$\begin{array}{l} a^6 + 2pa + ppaa - qq = 0 \\ \qquad\qquad -\ raa \end{array}$$

Ex cujus reſolutione pendet reſolutio componentium, & ex iſtis reſolutio compoſitæ.

Eodem

Eodem modo ſit Æquatio quinque dimenſionum, in qua una ſit radix realis, & quatuor imaginariæ; ponantur hujuſmodi radices componentes, & fiet ex harum multiplicatione Æquatio ſimilis, & æqualis; & comparando coefficientes devenietur tandem ad Æquationem inferiorem; ex cujus reſolutione Æquatio data dependet

Ita ſi detur Æquatio ſexta, cujus quatuor ſint radices imaginariæ & duæ reales, componi debebit Æquatio ex hujuſmodi radicibus, & ad determinandos coefficientes habebitur ſemper Æquatio inferior.

### *Altera Methodus*.

Altera methodus ut adſumatur Æquatio indeterminata, quæ ſit inferior uno gradu ac propoſita & quæratur inter eas comunis diviſor. Facta diviſione uſque dum habeatur reſiduum ſine incognita, fiat illud æquale zero, ex qua AEquatione determinabuntur coefficientes.

Quod ut intelligatur, adſumatur exemplum ſimplex; & ſit reſolvenda AEquatio cubica

$$x^3 - 24x - 72 = 0$$

Sit AEquatio $\quad xx - fx - \begin{matrix} g \\ -h \end{matrix} = 0$

Et dividendo, ut habeatur comunis diviſor, erit reſiduum

$$\begin{array}{llll} g^3 - 48gg & + 576g & + 576b & \\ + 3bgg & - 96bg & - 48bb & \\ & - 24ffg & - 24ffb & = 0 \\ & + 3bbg & + b3 & \\ & + 216fg & - 1728f & \\ & & + 72ff & \\ & & - 5181 & \end{array}$$

Ultimus autem diviſor erit AEquatio ſimplex

$$\begin{array}{llll} gx & - 72 & & \\ + bx & + fg & = 0 & \\ + ffg & + fb & & \\ - 24x & & & \end{array}$$

Fiant in Reſiduo omnes termini intermedii æquales nihilo, & erit $-48 + 3b = 0$; & fiet $b = 16$. Subſtituatur in ſequenti termino loco $b$ inventus valor 16, & fiet AEquatio quadratica,

$$ff - \frac{9}{2}f + 8 = 0$$

qua reſoluta fit $f = 8$, vel 1

Ita ſi in tertia columna ponatur

8 loco $f$, & 16 loco $b$

Fiet ſumma $+ 21952$.

Sit ergo $g^3 + 21952 = 0$

Et erit $g = -28$

Quod ſi ſubſtituatur alter valor 1 loco $f$; tum ſumma eſt $-2744$; & fit $g = 14$.

AEquatio ergo indeterminata

Fit $xx - 8x - 44 = 0$

Vel $xx - x - 30 = 0$

Quæ comunem habent diviſorem, ſeu comunem radicem.

Quo-

Quoniam vero ultima diviſor dedit AEquationem ſimplicem

$$\begin{array}{llll} & gx & - & 27 \\ + & bx & + & fg \\ + & ffx & + & fb \quad = 0 \\ - & 24x & & \end{array}$$

Subſtituto valore coefficientium
Fiet $x = 6$
quæ radix eſt comunis propoſitæ & aſſumptæ.

Eadem methodus extenditur ad omnes AEquationes, ut quiſque experiri poſſit, ne terreatur labore calculi.

Notabimus interim quod hujuſmodi reſolutio pendet ſemper a reſolutione AEquationis proxime inferioris, ut determinentur coefficientes aſſumpti. Ita in exemplo allato ut habeatur valor *b*, debet quidem reſolvi AEquatio ſimplex; ſed ut habeatur *f*, debet reſolvi AEquatio quadratica. Sic ſi AEquatio propoſita eſſet quatuor vel quinque dimenſionum, devenitur ad Cubicam, vel Biquadraticam, & ſic in infinitum.

Illud quoque advertendum ut tot adſumantur coefficientes quot ſunt dimenſiones AEquationis reſolvendæ.

## *Tertia Methodus.*

Tertia methodus eſt, ut adſumatur $x$ æqualis tot indeterminatis quantitatibus quot ſunt gradus in AEquatione propoſita uno minus, & componatur nova AEquatio, quæ ſit eadem ac propoſita, vi cujus comparationis determinari poſſunt quantitates aſſumptæ.

Sic ad Cubicam reſolvendam AEquationem, aſſumpſimus $x = a + b$

Et eodem modo ad biquadraticam

Erit $x = a + b + c$

Et ad quintam $x = a + b + c + d$

& ad determinandos coefficientes habebitur ſemper AEquatio uno gradu minor. Cujus methodi expoſitio aliunde petatur, neque enim in animo eſt omnia ingeniorum tentamina in hac materia exponere, cum & calculis involutiſſimis ſint referta, neque neceſſe ſit his methodis ad faſtigia nobiliſſimæ ſcientiæ pervenire, cum quælibet AEquatio facilius reſolvi poſſit vel per methodum diviſorum, vel per methodum Limitum, ut nunc eſt explicandum.

## *DE LIMITIBUS.*

## CAPUT VII.

*Limites* vocantur quantitates intra quas ſtant AEquationis radices.

### *OBSERVATIO I.*

Sit $x^4 - 34x^3 + 329xx - 1016x + 720 = 0$

Cujus radices ſunt omnes poſitivæ 1. 4. 9. 20.

Si loco $x$ ſubſtituatur zero

Fit

Fit ſumma poſitiva = 720

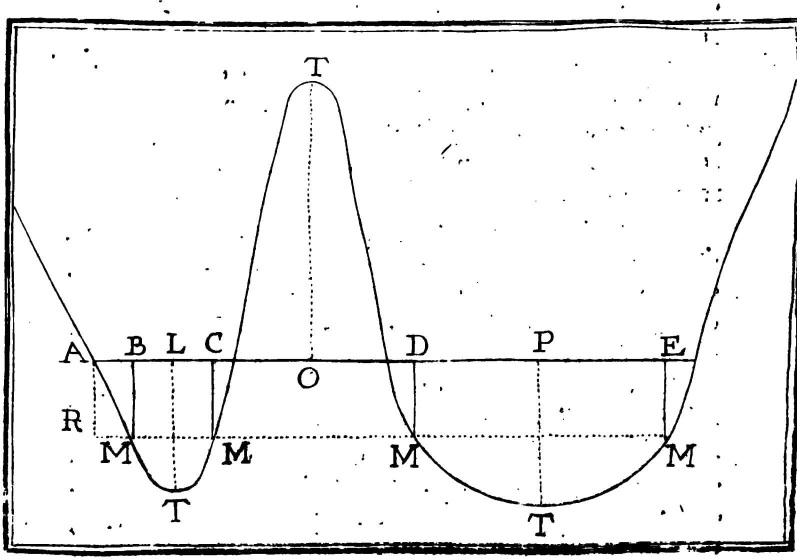
Sit loco $x$ ſubſtituatur quælibet quantitas intermedia inter 0. & radicem primam 1; ſummæ fiunt ſemper poſitivæ, quæ gradatim augentur & poſtquam ad maximum pervenire minuuntur, donec ſubſtituta radice 1 fiat ſumma zero

Subſtitutis deinde quantitatibus intermediis inter primam & ſecundam radicem ſummæ fiunt negativæ qua creſcunt uſque ad certum limitem, quo tranſgreſſo decreſcunt uſque dum ſubſtituta ſecunda radice 4 fiat zero.

Subſtituta quantitate intermedia inter ſecundam, & tertiam radicem ſummæ, rurſus fiunt poſitivæ, quæ poſtquam ad certum excrevere Limitem, gradatim decreſcunt, donec rurſus ad tertiam radicem 9 fiat zero.

Subſtituta demum quantitate majori quam 9, rurſus fiunt ſummæ negativæ, quæ eadem lege primo creſcunt inde decreſcunt uſque dum ſubſtituta quarta radice 20 fiant zero; poſt quam ſubſtituendo quaslibet quantitates fit ſemper ſumma poſitiva, quæ in infinitum excreſcit.

Quæcunque quantitates, inter quas ſtat radix, ſunt *Limites* ejuſdem radicis; *Veri* autem Limites dicuntur ii, qui ſubſtituti loco incognitæ $x$ dant maximas ſummas.




Quod ut exponatur ob oculos, liceat ex Geometria lumen mutuare, ſitque indeterminate AEquatio.

$$x^4, - 34x^3 + 329xx - 1016x + y = 0$$

quæ repræſentatur per curvam *AMTMT*, in qua poſito principio in *A*, *AB*, *AC* &c. ſunt *Abſciſſæ* = *x* *BM*, *CM* &c. *Ordinatæ* = *y*

Si loco *y* ponatur 720, determinabitur AEquatio,

tio, & erit ea, quæ nobis propoſita. Demiſſa ergo ordinata $AR = 720$, ductaque $RM$ parallela rectæ $AF$, ſecabit curvam in quatuor punctis $M$, $M$, unde demiſſæ ordinatæ $MB$, $MC$, $MD$, $ME$, determinabunt abſciſſas $AB$, $AC$, $AD$, $AE$, quæ ſunt quatuor AEquationis datæ radices.

Si ex curvæ verticibus $T$, ducantur tres ordinatæ $TL$, $TO$, $TP$, erunt $AL$, $AO$, $AP$, *Veri Limites*. Ita radix prima $AB$ erit inter punctum $A$, ſeu zero, & ſagmentum $AL$, cui reſpondet maxima ordinata $LT$. Secundæ radicis limites veri ſunt $AL$, & $AO$; tertiæ $AO$, & $AP$; quartæ $AP$, & quælibet alia quantitas major, quam $AE$.

Ex quibus ſequitur quod invenire veros Limites radicum idem ſit atque invenire partes, quæ ſubſtitutæ in AEquatione dent maximas ſummas, quod problema ad maxima, & minima ſpectat, & per calculos infiniteſimales facile expeditur.

Methodus autem in eo poſita eſt, ut multiplicentur ordine termini AEquationis datæ per Aritmeticam progreſſionem decreſcentem, in qua differentia ſit unitas, & primus terminus æquetur maximo exponenti æquationis.

Sit ergo $x^4 - 24x^3 + 329xx - 1016 - 100 = 0$
Multiplicentur termini per 4. 3. 2. 1. 0.
Et fiet AEquatio limitum

$$4x^3 - 72x^3 + 658xx - 1016x = 0$$

Rurſus ſi hujus termini multiplicentur per 3. 2. 1. 0
Erit $12xx - 144x + 658x = 0$
Quæ eſt ſecunda AEquatio Limitum, cujus nempe radices ſunt Limites radicum ſuæ antecedentis.

Tandem ſi hæc rurſus multiplicetur per 2. 1. 0
Fiet

Fiet tertia AEquatio Limitum

$24x - 144 = 0$

In qua ſit $x = 6$

## COROLLARIUM I.

Ex dictis facile eſt agnoſcere, quod ſi duæ quantitates diverſæ ſubſtituantur quarum una efficiat ſummam poſitivam, altera negativam, aut e contra, hæ quantitates ſunt ſemper limites alicujus radicis. Secus ſi idem ſignum præbeant. Quæ obſervatio Limites probat. Ut enim ſint veri Limites, debent dare ſigna contraria.

## THEOREMA.

Si datur AEquatio, cujus plures radices ſunt æquales, AEquatio Limitum continebit eaſdem radices una minus.

Sit enim AEquatio

$$x^4 - 4fx^3 + 6ffxx - 4f^3x + f^4 = 0$$

Cujus omnes radices æquantur $f$.

Erit AEquatio limitum

$$x^3 + 3ffx - 3fxx - f^3 = 0$$

Cujus tres radices æquantur $f$:

Si huic rurſus quæratur AEquatio Limitum, erit

$$xx - 2fx + ff$$

Cujus duæ radices æquantur $f$

Si tandem huic Limites quærantur erit AEquatio $x - f = 0$

Simili modo ſi detur AEquatio

$$\begin{array}{l} x^3 - 2fxx + ffx - cff = 0 \\ \quad - cxx + 2cfx \end{array}$$

Cujus duæ ſunt radices æquales $f$, AEquatio Limitum erit

$$\begin{array}{l} 3xx - 4fx + ff \\ \quad - 2cx + 2cf \end{array} = 0$$

Cujus una radix eſt $f$.

## COROLLARIUM I.

Ergo ſi aliquis Limes ſubſtitutus in AEquatione propoſita facit omnes terminos evaneſcere, hic erit radix comunis, & data AEquatio duas ſaltem hujuſmodi continebit radices.

Sit V. G. AEquatio $x^3 - 8xx + 21x - 8 = 0$
Erit AEquatio Limitum

$$xx - \frac{16x}{3} + 7 = 0$$

Cujus una radix eſt 3.

At ſubſtituto 3 in data AEquatione fit zero; Ergo 3 eſt quoque radix AEquationis datæ, & duæ ſunt in illa radices æquales 3.

## COROLLARIUM II.

Si Limes ſubſtitutus in æquatione data nec dat ſigna alterna, neque zero, erunt in data æquatione radices imaginariæ.

Et quoniam radices imaginariæ ſunt ſemper in numero pari, tot erunt paria hujuſmodi radicum quoties id acciderit.

## EXEMPLUM I.

UT autem Theoria illuſtretur exemplo, ſit æquatio $xx - 50x + 600 = 0$

Cujus per hanc methodum quærantur radices.

Multiplicatio ergo terminis per 2. 1. 0.

Fiet AEquatio Limitum

fiet $2xx - 50x = 0$

Quare $x = 25$

Erit ergo 25 Limes & quoniam 0 eſt minima omnium poſitivarum, erit prima radix inter 0. & 25. Et quoniam maximus coefficiens negativus eſt major quacunque radice poſitiva, altera radix erit inter 25, & 51

Limites ergo ſunt 0. 25. 51

Et quoniam ſubſtituto 0 fit +, ſubſtituto 25 fit −, & rurſus ſubſtituto 51 fit +, erunt veri Limites.

Quæratur ergo prima radix ſubſtituendo quantitatem intermediam inter 0. & 25. & ſubſtituto 10 fit ſignum −.

Ergo 10 eſt minor radice, & ſubſtituto 15 fit adhuc minus. Ergo 15 eſt minor radice.

Demum ſubſtituto 20 fit zero

Quare 20 eſt radix quæſita.

Similiter ſubſtituta quantitate intermedia inter 25, & 51 nempe 31 fit +. Ergo 31 eſt major radice quæſita. Sed ſubſtituto 30 fit zero. Ergo 30, eſt ſecunda radix.

EXEM-

## EXEMPLUM II.

Sit $x^4 - 80x^3 + 1998xx - 19937x + 5000 = 0$
Prima AEquatio Limitum eſt
$4x^3 - 240xx + 3996x - 14937 = 0$
Secunda $xx - 40x + 33 = 0$
Tertia $x - 20 = 0$
Limites ergo ſecundæ ſunt 0. 20. 41
Subſtinutis ergo quantitatibus intermediis.
Prima radix invenietur inter 10, & 15.
Altera inter 28, & 29.
Quare ſunt irrationales.
Limites ergo radicum in cubica ſint
0. 10. 28. 3736.
Et facta ſubſtitutione inveniuntur radices
Prima inter 5. 6
Secunda inter 21. 22.
Tertia inter 34. 35.
Sint ergo limites AEquationis propoſitæ
0. 6. 21. 34. 14938.
Subſtituendo ergo quantitates intermedias inveniuntur radices
Prima inter 0. 1
Secunda inter 12. 13.
Tertia inter 32. 33.
Quarta inter 34. 35.
Et ſunt omnes irrationales.

## EXEMPLUM III.

Sit æquatio $x^3 - 7x + 6 = 0$

Traſmutetur in aliam cui adſint ſinguli termini cum ſignis alternis

Ponatur ergo $8 - z = x$

Et fiet $z^3 - 24zz + 185z - 467 = 0$

Cujus inveniendæ radices.

Prima AEquatio Limitum eſt

$zz - 16z + \frac{185}{3} = 0$

Secunda $z - 8 = 0$

Quare Limites pro quadratica ſunt

o. 8. 17.

Et ſubſtituendo quantitates intermedias invenitur

Prima radix inter 6. 7.

Ponantur Limites primæ radicis quæſitæ in cubica o. 6.

Et quoniam ſubſtituendo 6 fit zero

Erit radix quæſita $= 6$

Diviſa ergo AEquatione per $z - 6$

Prodit $zz - 18z + 77 = 0$

Cujus radices methodo vulgari inveniuntur 7, & 11

Quare radices AEquationis cubicæ

$z^3$ &c. erunt 6. 7. 11.

Quoniam vero $8 - z = x$

Erunt radices AEquationes propoſitæ 2. 1. − 3

Quod erat inveniendum.

## EXEMPLUM IV.

SIt $x^3 - 19x + 20 = 0$

Cujus omnes radices ſunt reales, ac proinde incidit in caſum irreſolutum.

Tranſmutetur in aliam, cui adſint omnes termini cum ſignis alternis ponendo nempe $20 - z = x$

Et erit $z^3 - 60zz + 1081z - 7750 =$

Æquatio prima Limitum eſt

$3zz - 120z + 108 = 0$

Secunda $6z - 120 = 0$

Ex qua fit $z = 20$

Limites ergo Æquationis quadraticæ ſunt 0. 20. 121

Per quos invenitur

Prima radix inter 6. 7.

Secunda inter 54. 55

Sint ergo limites primæ radicis in cubica 0. 6. Et quoniam ſubſtituto 3 fit zero., erit 3. prima radix. Diviſa ergo ÆEquatione per

$z - 3$, fiet $zz + 3z - 10 = 0$

Qua reſoluta fiunt radices 2. $-$ 5. Erunt ergo radices Æquationis cubicæ $z^3$ &c. 2. 3. $-$ 5

Et quia $20 - z = x$

Erunt radices in data Æquatione 18. 17. 25.

## EXEMPLUM V.

*Pro Æquationibus, in quibus dantur plures radices æquales.*

Sit $x^4 - 6x^3 + 12xx - 10x + 3 = 0$

**AEquationes Limitum.**

Prima $4x^3 - 18xx + 24x - 10 = 0$

Secunda $12xx - 36x + 24 = 0$

Tertia $24x - 36 = 0$

Qua fit $x = \frac{3}{2}$

Erit ergo prima radix AEquationis quadraticæ inter o. $\frac{3}{2}$

Et facta ſubſtitutione invenitur 1.

Prima ergo radix æquationis cubicæ eſt inter o. 1

Sed experiundo Limitem 1, fit zero

Ergo 1 eſt radix cubicæ cumque radix quadraticæ ſit pariter 1; ergo in cubica duæ radices = 1; & in biquadratica tres.

Diviſa ergo biquadratica per cubum a latere $x - 1$ invenitur quarta radix 2.

Quare radices quæſitæ ſunt 1. 1. 1. 2.

## EXEMPLUM VI.

*Pro radicibus imaginariis.*

Sit $x^4 - 6x^3 + 17xx - 24x + 18 = 0$

Erunt

Erunt æquationes Limitum

Prima $4x^3 - 18xx + 34x - 24$ o

Secundæ $12xx - 36xx + 34 = 0$

Tertia $24x - 36 = 0$

Et ſit $x = \frac{3}{2}$

Limiter ergo pro quadraticà ſunt o. $\frac{3}{2}$. 3

Cum autem ſubſtituto o fiat + & ſubſtituto $\frac{3}{2}$ fiat +, $\frac{3}{2}$ non erit Limes; quod argumento eſt radices quadraticas eſſe imaginarias.

Erunt ergo imaginariæ etiam in cubica; & una realis. Quæ ut inveniatur, (cum non ſint limites in quadratica,) invenienda erit inter o, & 7 nempe maximum coefficientem unitate auctum, & fit inter 1. & 2

Ponantur ergo Limites Æquationis propoſitæ o. 2. 24.

Sed cum ſubſtituto 2. fiat +, cum deberet fieri −, 2 non erit Limes. Quare etiam aliæ duæ radices ſunt imaginariæ & conſequenter Æquatio eſt impoſſibilis.

## S C H O L I O N.

POteſt adhiberi methodus Limitum abſque ulla traſmutatione Æquationis; ſed quia praxis facilior, ideo traſmutatione uſi ſumus.

## *Methodus Nevvtoni ad inveniendos Limites.*

Summa methodi in eo poſita eſt ut ex Æquatione data deducantur ordine Æquationes Limitum, ut ſupra explicatum eſt. Et tum qui numerus poſitivus ſubſtitutus loco incognitæ in ſingulis Æquationibus facit poſitivam ſummam, is erit major omni poſitiva radice Æquationis datæ. Qui vero numerus negativus dat poſitivam ſummam in Æquationibus parium dimenſionum, ſed negativam in imparium, is erit major quacunque negativa.

Sit exempli gratia

$$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30xx + 63x - 120 = 0$$

Erunt Æquationes Limitum

I. $5x^4 - 8x^3 - 30xx + 60x + 63 = 0$

II. $x^3 - \frac{6xx}{5} - 3x + 3 = 0$

III. $xx - \frac{4x}{5} - 1 = 0$

IV. $10x - 4 = 0$

Si in qualibet AEquatione ſubſtituatur 1 loco incognitæ, non fit ubique ſumma poſitiva. Ea autem fit ſi ſubſtituatur 2. Quare 2. erit Limes, quem nulla ex poſitivis datæ AEquationis radicibus traſgreditur.

Similiter ad indagandum Limitem negativum ſubſtituatur $-1$, & quoniam ſigna non reſpondent, is non erit Limes, ſimiliter nec $-2$. At ſubſtituto $-3$ dat poſitivam ſummam in paribus, negativam in imparibus. Quare erit Limes omni nega-

tiva

tiva radice major. Quærantur ergo poſitivæ inter 9. 2; negativæ inter o. − 3.

Ratio hujus methodi in eo poſita eſt, quod quælibet radix poſitiva in AEquationibus Limitum eſt ſemper minor maxima poſitiva radice AEquationis propoſitæ, & quælibet negativa eſt minor maxima negativa ejuſdem AEquationis.

Cum autem in quacunque AEquatione numerus qui tranſgreditur maximam poſitivam radicem, det poſitivam ſummam neceſſe eſt ut numerus qui in ſingulis dat poſitivam ſummam, tranſgrediatur maximas omnium radices, & proinde ſit Limes poſitivus.

Simili modo cnm in quacunque AEquatione numerus qui tranſgreditur maximam negativam det negativam ſummam in dimenſione impari, poſitivam in pari, igitur ſi numerus hæc in ſingulis faciat, tranſgredietur maximam radicem negativam in ſingulis. Quare erit negativus Limes.

*Datis Limitibus proximis quantitatis intermediæ irrationalis approximare in infinitum.*

## PROBLEMA.

PRima methodus in eo poſita eſt ut multiplicentur radices AEquationis datæ per numerum quemlibet ita ut habeatur AEquatio, cujus radices minus differant a ſuis Limitibus.

Sit V. G. $xx - 20x + 65 = 0$

Cujus prima radix inventa ſit inter 4. & 5. Multipliplicentur radices per 1000, & erit nova AEquatio

$$yy - 20000y + 65000000 = 0$$

Cujus prima radix eſt inter 4000., & 5000. Adſumptis ergo Limitibus propioribus invenietur inter 4094. & 4095. Erit ergo radix quæſita inter

$\frac{4094}{1000} \cdot \frac{4095}{1000}$.

*Altera methodus.*

Fiat $4 + y = x$

Et erit $16 + 8y + yy = xx$

$- 80 - 20y = - 20x$

$+ 65 = + 65$

Quare fit $yy - 12y + 1 = 0$

Abjecto $yy$ propter parvitatem

Erit $- 12y + 1 = 0$

Et fit $y = \frac{1}{12}$

Ponatur rurſus $4 + \frac{1}{12} + y = x$

Seu $\frac{49}{12} + y = x$

Et erit $\frac{2010}{144} + \frac{49y}{6} + yy = xx$

$- \frac{98}{12} - 20y = - 20x$

$+ 65 = + 65$

Ideſt $50 + \frac{57}{72} - 71y + yy = 0$

Et abjecto $yy$ fit $71y = 70 + \frac{57}{72}$

Un-

Unde educitur $y = \frac{5040}{5112}$

Erit ergo radix $4 + \frac{1}{12} + \frac{5040}{5112}$

Quod licet continuare in infinitum.

*Aliud exemplum.*

Sit ſecundo $xx - 5x - 51 = 0$.
Et quæratur prima radix inter 8; & 9.
Fiat $8 + y = x$
Et erit $y = \frac{7}{11}$; aut in decimalibus 0. 6 quam proxime

Fiat rurſus $8 + 06 + y = x$
Seu $8, 6 + y = x$
Et fiet $y = 0.0032$
Quare $x = 8 + 06 + 00032$
Quod licet continuare in infinitum.

*Univerſaliter.*

Sit AEquatio biquadratica quæcumque.

$x^4 - ax^3 + bxx - cx + d = 0$
Poſito limite $f$
Fiat $f + y = x$
Et fiet nova AEquatio

$y^4 - ny^3 - pyy + qy - r = 0$
In qua $y = \frac{r}{y^3 - nyy - py + q}$

 Si

Si in allata AEquatione negligantur altæ dimenſiones $y$, ut quantitates ſatis parvæ, fiet $qy - r = 0$

Et erit $y = \frac{r}{q}$

Quo valore ſubſtituto in Canone

Fit $y = \frac{q^3 r}{qq - pqqr - nqrr + r^3}$

Ex quo Canone educitur valor $y$.

## EXEMPLUM.

Sit $x^5 - 7x^3 + 14xx - 7x + 1 = 0$

Et Limes proxime minor ſit 4

Fiat ergo $4 + y = x$

Erit $y^4 + 9y^3 + 26yy - 85y + 5 = 0$

In formula ergo generali

$n = -9$

$p = -26$

$q = -85$

$r = -5$

Quibus valoribus ſubſtitutis in Canone fit

$y = \frac{307062}{969275}$

AP-

# APPLICATIO ANALYSIS

## AD PROBLEMATA ALTIORUM DIMENSIONUM.

### SECTIO II.

Reſolutio duarum dimenſionum.

### CAPUT I.

### PROBLEMA I.

INvenire duos numeros, quorum quadratorum differentia ſit data, & ſumma pariter quadratorum.

Sit differentia quadratorum $= 12$
Et ſumma $= 20$
Numerus primus $x$, ſecundus $y$
Quare per primam conditionem $xx - yy = 12$ A
Per ſecundam $xx + yy = 20$ B
In prima æquatione $xx = 12 + yy$
Subſtituendo in B $12 + 2yy = 20$ B
Et fit $yy = 4$
Quare $y = \pm 2$
Si ſumatur $y = 2$; $x = 4$
Si ſumatur $y = -2$, $x = -4$

Uni-

*Univerſaliter.*

Invenire duos numeros, ut differentia quadratorum ſit $a$, & ſumma eorumdem ſit $b$.

Per primam conditionem $xx - yy = a$ A

Per ſecundam $xx + yy = b$

In prima $xx = yy + a$

Subſtituendo in ſecunda $2yy + a = b$

Et fit $yy = \frac{b - a}{2}$

Quare $y = \pm \sqrt{\frac{b - a}{2}}$

## PROBLEMA II.

Invenire duos numeros, quorum ſumma ſit 8, & productum 12

Numerus primus $x$; ſecundus $y$

Per primam conditionem $x + y = 8$ A

Per ſecundam $xy = 12$ B

In prima $x = 8 - y$

Subſtituendo in ſecunda $8y - yy = 12$

Et mutando ſigna $yy - 8y = -12$

Compleatur quadratum

Et erit $yy - 8y + 16 = 4$

Quare $y - 4 = \pm 2$

Et fit $y = 4 \pm 2$

Si ſumatur $y = 6$; $x = 2$

Si ſumatur $y = 2$; $x = 6$

*Univerſaliter.*

Invenire duos numeros, quorum ſumma ſit $a$, & productum $b$

Numeri quæſiti $x$, & $y$

Ergo $x + y = a$ A

Et $xy = b$ B

In prima æquatione $x = a - y$

Subſtituendo in ſecunda $ay - yy = b$

ſeu $yy - ay = - b$

Complendo quadratum

$$yy - ay + \frac{aa}{4} = \frac{aa}{4} - b$$

Quare $y - \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{aa}{4} - b}$

Et $y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} - b}$

## PROBLEMA III.

INvenire duos numeros, quorum ſumma eſt 4 & quadratorum ſumma 40.

Numeri quæſiti $x$, $y$

Ergo $x + y = 4$ A

Et $xx + yy = 40$ B

In Æquatione A $x = 4 - y$

Subſtituendo in B $16 - 8y + 2yy = 40$

Seu $8 = 4y + yy = 20$

Quare $yy - 4y = 12$

Et complendo quadratum

$$yy - 4y + 4 = 16$$

Ergo

Ergo $y - 2 = \pm 4$

Et ſit $y = 2 \pm 4$

Si $y$ ſit $6$; $x = -2$

Si $y$ ſit $-2$; $x = 6$

*Univerſaliter.*

Invenire duos numeros, quorum ſumma eſt $a$, & ſumma quadratorum $b$

Numeri quæſiti $x$, & $y$

Ergo $x + y = a$ A

Et $xx + yy = b$ B

In prima $x = a - y$

Quare $xx = aa - 2ay + yy$

Subſtituendo ergo in ſecundam

$aa - 2ay + 2yy = b$

Ideſt $yy - ay = \frac{b - aa}{2}$

Complendo quadratum

$yy - ay + \frac{aa}{4} = \frac{aa}{4} + \frac{b - aa}{2}$

Ergo $y - \frac{a}{2} = \pm \sqrt{b - \frac{aa}{4}}$

Et $y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{b - \frac{aa}{4}}$

## PROBLEMA IV.

DUo mercatores poſuerunt ſimul fundum 12; & lucrum fuit 80.

Primus lucrum habuit 20 tam pro fundum, quam

quam pro tempore 2. Alteri lucrum ceſſit 72 tam pro fundo, quam pro tempore 4. Quæritur fundum utriuſque?

Fundum primi $= x$

Fundum ſecundi $= 12 - x$

Fundum compoſitum primi propter tempus $= 2x$

Fundum compoſitum ſecundi $= 48 - 4x$

Lucrum primi $= 20 - x$

Lucrum ſecundi $= 72 - 12 + x = 60 + x$

Quoniam autem lucra debent eſſe ut Funda compoſita erit $20 - x : 60 + x = 2x : 48 - 4x$

Quare $- 80x + 4xx + 960 - 48x = 120x + 2xx$

Et reducendo $xx - 124x = - 480$

Complendo quadratum

$xx - 124x + 3844 = 3844 - 480$

Et extrahendo radicem $x - 62 = \pm 58$

Quare $x = 62 \pm 58$

Si ſumitur $x = 4$, fundum alterius $= 8$

Sed ſi $x = 120$, fundum alterius $= - 108$ in quo caſu deducitur ſecundum non ſolum non habuiſſe fundum; ſed lucratum eſſe ſuper fundum alterius, quantum importat pars 108.

## PROBLEMA V.

PEtro ſunt duo genera mercium. Libra primi generis valet 3 pluſquam libra ſecundi. Libræ autem ſunt 15, & idem eſt impendium in utraque merce, nempe 60. Quæritur quantum valet libra utriuſque mercis, & quot libræ unius, quot alterius paratæ fuerint?

Pretium libræ pro prima merce $= x + 3$

Pretium libræ pro ſecunda $= x$

Quantitas primæ mercis $= y$
Quantitas ſecundæ $= 15 - y$
Pretium totale primæ mercis $= xy + 3y$
Pretium totale ſecundæ $= 15x - xy$
Propter primam conditionem $xy + 3y = 30$ A
Propter ſecundam $15x - xy = 30$ B
In prima ergo $y = \frac{30}{x + 3}$

Quare ſubſtituendo in ſecunda

$$15x - \frac{30x}{x + 3} = 30$$

Et tollendo fractiones

$$xx - x = 6$$

Complendo quadratum

$$xx - x + \frac{1}{4} = 6 + \frac{1}{4}$$

Et fit $x = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

Nempe $x = 3$, vel $- 2$
Si ponatur $x = 3$; $y = 5$
Si ponatur $x = - 2$; $y = 30$

## *SCHOLION.*

Quiſque poterit ſuo Marte univerſales facere.

## PROBLEMA VI.

Datis tribus numeris 5. 4. 6 invenire quartum contraharmonicum
Numerus quæſitus $a$

Ergo

Ergo propter conditionem problematis

$5 - 4 : 6 - x = x : 5$

Quare $5 = 6x - xx$

Seu $xx - 6x = -5$

Complendo quadratum

$xx - 6x + 9 = 4$

Et fit $x = \pm 2 + 3$

Duo ergo poſſunt eſſe quæſiti contraharmonici 1, & 5.

*Univerſaliter.*

Datis tribus $a.\ b.\ c.$ invenire quartum contraharmonicum.

Quantitas quæſita $x$

Ergo $a - b : c - x = x : a$

Ergo $aa - ab = cx - xx$

Seu $xx - cx = ab - aa$

Et fit $x = \frac{c}{2} \pm \sqrt{ab - aa + \frac{cc}{4}}$

## *APPLICATIO ANALYSIS AD PROBLEMATA TRIUM ET QUATUOR DIMENSIONUM.*

## CAPUT II.

### PROBLEMA I.

TRes ſocii poſuerunt ſimul fundum 60. Primus quidem pro tempore 1, ſecundus pro tempore 2, tertius pro tempore 3. Factumque eſt fundum 130. Fine temporis diviſum eſt fundum.

Primo contigit 15. Secundo 40. Tertio 75; Quæritur ſingulorum fundum?

Fundum primum $= x$
Fundum ſecundum $= y$
Fundum tertium $= 60 - x - y$
Fundum compoſitum primi propter tempus $= x$
Secundi $= 2y$
Tertii $= 180 - 3x - 3y$
Lucrum primi $= 15 - x$
Lucrum ſecundi $= 40 - y$
Lucrum tertii $= 15 + x + y$

Quoniam autem lucra debent eſſe in ratione fundorum compoſitorum, erit ut fundum compoſitum primi ad fundum compoſitum ſecundi ita lucrum primi ad lucrum ſecundi; & ut fundum compoſitum primi ad fundum compoſitum tertii ita lucrum primi ad lucrum tertii. Quare erunt hæ proportiones $x : 2y = 15 - x : 40 - y$

Et $x : 180 - 3x - 3y = 15 - x : 15 + x + y$

Per primam fit Æquatio

$$40x - xy = 30y - 2xy \qquad \text{A}$$

Et per ſecundam

$$15x + xx + xy = 2700 - 45x - 45y - 180x + 3xx + 3xy \qquad \text{B}$$

In Æquatione A

$$y = \frac{40x}{30 - x}$$

Et ſubſtituendo hunc valorem in Æquatione B & reducendo erit

$$x^3 - 190xx + 5850x - 40500 = 0$$

Ut habeatur Æquatio ſimplicior dividantur radices per 10; & erit

$$y^3 - 19yy + \frac{5850y}{10} - \frac{405}{10} = 0$$

Sive $y^3 - 19yy + \frac{117y}{2} - \frac{81}{2} = 0$

Per methodum Limitum multiplicetur Æquatio per 3. 2. 1. 0, & fiet $3zz - 38z + \frac{117}{2} = 0$

Quæ ſi reſolvatur dabit radices imaginarias.

Ergo nullum Limitem habet ad reſolvendam Cubicam. Radix ergo realis Cubicæ invenienda eſt inter o. & maximum coefficientem negativum $\frac{81}{2}$

Subſtituto ergo 20; quia dat ſignum + erit major radice quæſita; & adhuc ſubſtituto 10, & 5, & 2, erit radix inter o, & 2, & invenitur eſſe = 1.

Quoniam ergo $y = 1$, erit $x = 10$

Fundum ergo primi erit = 10

Secundi = 20

Tertii = 30

## PROBLEMA II.

PEtrus debet Paulum penſionem annuam $a$ ſolvendam per annos $n$. Quæritur quodnam ſit fundum Pauli ? Habeatur autem ratio fructus, & fructus fructus.

Sit fundum quæſitum $x$ & ratio in qua ſingulis annis augetur ſit $1 : r$

Anno ergo primo completo fundum ob rationem fructus fiet $rx$

Sed

Sed quia detrahitur ab ipſo penſio $a$, remanebit $rx - a$

Et anno ſecundo erit $rrx - ra - a$.

Et anno tertio $r^3 x - rra - ra - a$

Anno denique $n$ erit

$$r^n x, - r^{n-1} a, - r^{n-2} a, - r^{n-3} a \ldots - r^{n-n} a$$

Cumque completis annis $n$ ſit ſolutum debitum; & conſequenter fundum fiat zero erit Æquatio

$$r^n x = r^{n-1}. a + r^{n-2}. a + r^{n-3}. a \ldots + r^{n-n} a$$

Cum vero alterum hujuſce Æquationis membrum ſit Geometrica ſeries, cujus ſumma eſt $\frac{r^n - 1}{r - 1}$

Erit ergo $$\frac{r^n x}{a} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Et ſit $$x = \frac{ar^n - a}{r^{n+1} - r}$$

Ponantur nunc numerus annorum 3, annua penſio 100; & augeatur fundum ut 20 : 21

Erit $a = 100$; $n = 3$; $r = \frac{21}{20}$

Et ſit $$x = \frac{100r^3 - 100}{r^4 - r^3}$$

$$100r^3 - 100 = \frac{1261}{80}$$

r

$$r^{3} - r^{8} = \frac{9261}{160000}$$

Ergo $x = \frac{2522000}{9261} = 272 + \frac{2008}{9261}$

## *SCHOLION.*

SI datur fundum, & tempus, & ratio fructus, quæraturque penſio ſolvenda, tum ſubſtitutis numeris in Æquatione quæratur quantitas *a* quæ dabitur per Æquationem ſimplicem.

At ſi datur fundum; & tempus, & annua penſio, & quæratur ratio fructus, tum Æquatio exurgit, & quo magis tempus creſcit, eo major eſt ejus dimenſio.

Sit fundum 20, penſio 10, anni 3, & fiet Æquatio

$$2r^{4} - 3r^{3} + 1 = 0$$

At ſi anni ſint 8; fiet

$$2r^{9} - 3r^{8} + 1 = 0$$

Cujus æquationes ſunt reſolvendæ.

## PROBLEMA III.

FUndum augetur in ratione $1 : r$ & ſpatio annorum 4, fit fructus 1000. Quæritur fundum?

Sit fundum $x$, &

I. anno erit $rx$

II. $rrx$

III.

III. $r^3 x$

IV. $r^4 x$

Itaque fundum poſt quatuor annos erit $r^4 x$
Sed fructus eſt 1000

Ergo $r^4 x - x = 1000$
Et fit $x = \frac{1000}{r^4 - 1}$

Si fundum creſcat ut 20 : 21
Fundum fuit $\frac{160000000}{34481}$

## PROBLEMA IV.

*Dato fundo, & fructu, datoque tempore, invenire rationem augmenti & fructu.*

Sit fundum 1000, & fructus 100 tempore 4; & ratio augmenti quæſita ſit 1 : $x$

Erit fundum anno quarto $= 1000x^4$

Quare $1000x^4 = 10100$

Et fit $x^4 = \frac{101}{10}$

Quare $x = \sqrt[4]{\frac{101}{10}}$

SCHO-

## *SCHOLION.*

*Quod expeditius fit per Logarithmos.*
*Erit enim* $4 L x = L 101 - L 10$.
Quare $L x = \frac{L 101 - L 10}{4}$.

## PROBLEMA V.

Fundum augetur ut $1 : r$
Quæritur tempus, quo fundum datum $C$ fiat $mC$.

Quoniam fundum $C$ creſcit ut $1 : r$
Anno primo $= rC$
Secundo $= rrC$
Tertio $= r^3 C$
Quarto $= r^4 C$
Anno ergo $x$ $= r^x C$
Sed debet fieri $mC$
Ergo $r^x C = mC$
Et erit $r^x = m$
Oportet ergo elevare $r$ ad potentiam, quæ ſit æqualis $m$.

## *SCHOLION.*

*Sed expeditius fit per Logarithmos*
*Erit enim* $x L r = L m$

*Et ſit* $x = \frac{L\, m}{L\, r}$

*Ponatur nunc fieri duplum & augmentum eſſe ut* 20 : 21

*Erit tempus* $= \frac{L\, 2}{L\, 21 - L\, 20}$

*Et ſi debeat fieri triplum*

*Erit tempus* $= \frac{L\, 3}{L\, 21 - L\, 20}$

*Tempora ergo ſunt ut Logarithmi exponentium.*

## PROBLEMA VI.

TRes emuntur merces; & unciæ ſimul ſunt 13. Uncia ſecundæ valet primam + 10; & uncia tertiæ valet ſecundam + 20.

Impenditur autem pro qualibet merce 120.

Quæruntur unciæ pro ſingulis mercibus; & unciæ valor.

Unciæ primæ mercis $y$

Secundæ $z$

Tertiæ $13 - y - z$.

Pretium unciæ in prima merce $= x$

Pretium ſecundæ $= x + 10$

Pretium tertiæ $= x + 20$

Pretium totius mercis primæ $= xy$

Pretium ſecundæ $= xz + 20z$

Pretium tertiæ $= 13x - xy - xz + 260 - 20y - 20z$

Sed $xy = 120$

Ergo $y = \frac{120}{x}$

Rurſus $xz + 20z = 120$

Ergo

Ergo $z = \frac{120}{x + 20}$

Subſtituendo hoſce valores in pretio tertiæ mercis; erit Æquatio

$$13x^3 + 30xx - 4600x - 24000 = 0$$

quæ ut ſimplicior evadat, dividantur radices per 10, ponendo $x = 10u$

Et erit $13u^3 + 3uu - 46u - 24 = 0$

Subſtituantur diviſores homogenei 1. 2. 3. 4. .... & quoniam ſubſtituendo 2 ſtatim evaneſcunt termini erit $u = 2$; Quare $x = 20$.

Pretia ergo mercium pro ſingulis unciis ſunt 20. 30. 40. Cum autem $xy = 120$. Erit $y = 6$; Et quoniam pariter $xz + 20x = 120$

Erit $40z = 120$

Et fit $z = 3$

Unciæ ergo ſunt 6. 3. 4.

## PROBLEMA VII.

DUo Mobilia per eandem viam ab eodem puncto, diverſo ſed tempore moventur. Primum peragrat ſpatia, quæ ſunt ut quadrata temporum; alterum ut cubi. Effluxit jam tempus 4 ex quo primum moveri incœpit.

Quæritur tempus concurſus?

Sit tempus quæſitum $x$.

Spatium peragratum a primo, tempore $4 = 16$

Et ſpatium percurrendum tempore $4 + x$

$= 16 + 8x + xx$

Spatium percurrendum a ſecundo tempore $x = x^3$

Qua-

Quare $x^3 = 16 + 8x + xx$

Et fit Æquatio $x^3 - xx - 8x - 16 = 0$
Multiplicatur per 3. 2. 1. 0
Et fiet Æquatio limitum
$3xx - 2x - 8 = 0$
Multiplicetur hæc alia per 2. 1. 0.
Et fit $6x - 2 = 0$
Subſtituantur methodo Nevvtoni 1. 2. 3. ſucceſſive in ſingulis Æquationibus, & quoniam nullus dat ſignum affirmativum in omnibus, nullus exiſtis erit Limes. Subſtituto autem 4 evaneſcunt termini in Cubica. Quare 4 eſt radix. Duplo ergo tempore fiet concurſus.

## *S C H O L I O N.*

SI univerſaliter ponatur tempus $a$, & tempus quæſitum $x$, erit æquatio $x^3 = xx + 2ax + aa$

Ut ergo fiat radix rationalis, oportet Cubum æquari quadrato. Et quoniam omnes numeri quadrocubi ſunt etiam quadrati, ſi $a + x$ ſit latus quadrato-cubicum, erit ſemper $z$ rationalis.

Unde exurgit Methodus inveniendi in rationibus infinita tempora, quibus motum eſt ſolitarie primum Mobile.

Sit enim V. G. $x^3 = 729$
Et erit $x = 9$
Et $x + a = 27$. Quare $a = 18$.
Oportet ergo ut in hac hypotheſi tempus præcedens ſit $= 18$

PRO-

## PROBLEMA VIII.

Sint nunc ſpatia primi ut quadrata, & ſecundi ut surſolida. Sitque tempus præcedens 28. Eadem methodo erit $x^5 = xx + 56x + 784 = 0$

Seu $x^5 - xx - 56x - 784 = 0$

Quærantur Limites & erunt Æquationes Limitum

I. $5x^4 - 2xx - 56 = 0$

II. $20x^3 - 2xx = 0$

Ideſt $20x - 2 = 0$

Subſtituto 1 non fit Limes, nec 2; nec 3.

Subſtituto autem 4. in Æquatione data fit zero. Ergo radix erit 2. Et poſt tempus 4 fiet concurſus.

## PROBLEMA IX.

Unum mobile percurrit ſpatia ut poteſtates temporum. Alterum in progreſſione Arithmetica cujus differentia eſt 18.

Spatium vero primum æquale eſt, & poſt quatuor tempora fit pariter æquale.

Quæritur menſura hujus ſpatii?

Spatium quæſitum $x$.

Spatium peragratum a primo

$x^1 + x^2 + x^3 + x^4$

Spatium ſecundi $4x + 108$

Erit ergo

$x^4 + x^3 + xx + x = 4x + 108$

Nempe $x^4 + x^3 + xx - 3x - 108 = 0$

Fiant Æquationes Limitum

I. $4x^3 + 3xx + 2x - 3 = 0$

II. $12xx + 6xx + 2 = 0$

III. $24x + 6 = 0$

Jam ſubſtituto 1 non fit Limes, nec pariter 2. At ſubſtituto 3 fit zero. Ergo 3 eſt radix quæſita. Tempus ergo primum $= 3$.

## PROBLEMA X.

Vis primi agentis decreſcit ut quadrata diſtantiarum a centro. Agentis ſecundi vis ut cubi; Vis tertii ut ſpatia $+ 2$.

Quæritur punctum in quo ſumma virium primi & tertii eſt ad vim ſecundam ut 4 : 1.

Spatium quæſitum $x$

Vis prima $\frac{1}{xx}$ Vis ſecunda $\frac{1}{x^3}$ Vis tertia $\frac{1}{x+2}$

Erit ergo $\frac{1}{xx} + \frac{1}{x+2} = \frac{4}{x^3}$

Et tollendo fractiones

$x^3 + xx - 2x - 8 = 0$

Fiant Æquationes Limitum

Prima $3xx + 2x - 2 = 0$

Secunda $6x + 2 = 0$

Subſtituto 1 non fit Limes, & ſubſtituto 2 fit zero. Quare 2 eſt æquationis radix. Reliqua duæ ſunt imaginariæ.

Si debeat eſſe quintupla, fiet Æquatio.

$x^3 + xx - 3x - 10 = 0$

Cujus radix realis eſt ſurda nempe inter 2 & 3. Reliquæ ſunt imaginariæ.

F I N I S.

# INDEX CAPITUM

## PARS PRIMÆ.

### SECTIO I.

*De primo Algorithmo Numerico* Cap.I. Pap.4
*De primo Algorithmo Litterali* Cap.II. 13
*De Poteſtatibus Arithmeticis*, & *Radicibus* Cap.III. 21
*De prima Analyſi Arithmetica* Cap. IV. 32

### SECTIO II.

*De ratione*, & *proportione Arithmetica* Cap. I. 35
*De ratione* & *proportione Geometrica* Cap. II. 39
*De proportione Harmonica*, & *Contraharmonica* Cap.III. 51
*De proportionibus Compoſitis* Cap. IV. 53
*Applicatio regulæ aureæ ad problemata compoſita*. 57
*De Algorithmo Fractionum* Cap. V. 59
*De Fractionibus Decimalibus* Cap. VI. 71
*De Algorithmo Poteſtatum Cognatarum* Cap. VII. 79
*De Algorithmo Radicum* Cap. VIII. 83
*Applicatio Analyſis ad Problemata ſimplicia* Cap. IX. 91

### SECTIO III. 112

*De Serie Arithmetica* Cap. I. 114
*De Serie Geometrica* Cap. II. 118
*De Seriebus Figuratorum* Cap. III. 123
*De Seriebus Poteſtatum* Cap. IV. 127
*De Seriebus Hypſiclis* Cap. V. 129
*De Seriebus infinitis fractionum quarum denominatores ſunt continue proportionales Geometrici*, & *numeratores ſunt Figurati* Cap. VI. 133

*De*